

УДК 536.21

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ЗОНЕ КОНТАКТА
ДВУХ ПЕРИОДИЧЕСКИ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

В.М. Попов¹, А.Д. Чернышев², А.А. Карпов¹
(¹ФГБОУ ВПО ВГЛТА, ²ФГБОУ ВПО ВГУИТ)

Развитие современной техники сопровождается повышением теплонапряженности элементов конструкций. На тепловой режим функционирования таких систем большое влияние оказывает контактное термосопротивление, обусловленное несовершенством соединения контактирующих металлических поверхностей. Подавляющее большинство исследований процессов формирования термосопротивлений в зоне контакта проводилось для соединения со статическими контактами [1, 2]. В тоже время в паро- и газотурбинных установках, двигателях внутреннего сгорания, на металлообрабатывающих комплексах и других теплонапряженных технических системах имеют место соединения с периодически контактирующими металлическими поверхностями, через которые транспортируются тепловые потоки высокой плотности.

Ниже предлагается математическая модель распределения температур в зоне контакта двух периодически соприкасающихся стержней.

Имеется два стержня одинаковой длины ℓ , оси которых располагаются на одной прямой. Один стержень расположен на отрезке $[0, \ell]$, другой на $[-\ell, 0]$. Дальние концы обоих стержней все время остаются нагретыми до постоянных температур T_0 и $(-T_0)$ соответственно. При соприкосновении этих стержней друг с другом температуры на их контактирующих концах мгновенно выравниваются и становятся равными 0 все время при $t \in [0, t_1]$, где t_1 – время продолжительности контакта. Для простоты рассмотрений температуры в обоих стержнях отнесем к T_0 , а координату вдоль стержней \tilde{x} к длине стержня ℓ , т.е.

$$U(\tilde{x}, t) = T_0 u(x, t), \quad \tilde{x} = \ell x, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ и x – безразмерные температура и координата. Время t остается размерной величиной. Допустим, что для правого стержня при $0 \leq x \leq 1$ темпе-

ратурное поле описывается некоторой функцией $u(x, t)$, а в левом стержне при $-1 \leq x \leq 0$ температурное поле антисимметрично и поэтому будет описываться функцией $[-u(x, t)]$. Такое предположение упрощает всю задачу, т.к. ее достаточно сформулировать только для одного правого стержня.

Обозначим через $u_1(x, t)$ – температуру в правом стержне при первом соединении стержней, $u_2(x, t)$ – при втором соединении после первого их разъединения, $u_i(x, t)$ – при i – ом соединении после $(i-1)$ – го разъединения; через $v_i(x, t)$ – температуру в правом стержне после i – го разъединения стержней. Индексом " i " обозначен номер цикла. При первом соединении и последующем разъединении стержней $i = 1$, при втором соединении и разъединении $i = 2$ и т.д. Время, когда стержни контактируют, обозначим через t_1 , через t_2 – время бесконтактного состояния стержней. При рассмотрении каждого цикла время t будем отсчитывать от нуля, т.е. при контактировании стержней $0 \leq t \leq t_1$, а при их разомкнутом состоянии $0 \leq t \leq t_2$ для любого номера i .

Пусть стержни находятся в контакте между собой в течение времени t_1 в i – ом цикле. Тогда приходим к следующей начально-краевой задаче:

найти такое решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad t \in [0, t_1], \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

которое удовлетворяет заданному начальному условию

$$u_i|_{t=0} = f_i(x), \quad f_1(x) = 1, \quad f_i(1) = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$u_i|_{x=0} = 0, \quad u_i|_{x=1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Если стержни не контактируют между собой, то ближние концы этих стержней не обмениваются теплом между собой и с окружающей средой, т.е.

находятся в состоянии теплоизоляции. Для бесконтактного состояния двух стержней будем иметь другую начально-краевую задачу:

найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}, \quad t \in [0, t_2], \quad x \in [0, 1], \quad (5)$$

которое удовлетворяет некоторому начальному условию

$$v_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad \varphi_i(1) = 1, \quad i=1, 2, \dots \quad (6)$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad v_i|_{x=1} = 1, \quad i=1, 2, \dots \quad (7)$$

Весь процесс контактной теплопроводности двух взаимодействующих стержней будем описывать следующим образом. Процесс начинается с первого контакта двух стержней, когда температурное поле в стержнях описывается решением задачи (2) ... (4) при $i = 1$. По прошествии времени t_1 стержни разъединяются и в течение времени t_2 температурное поле в стержнях будет описываться решением задачи (5) ... (7) при $i = 1$. Конечное температурное поле в период контакта стержней будет выполнять роль начальной температуры для последующего их бесконтактного состояния, т.е.

$$u_i(x, t_1) = u_i|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Поэтому каждую функцию $\varphi_i(x)$, как начальные условия в задачах (5)...(7), следует вычислять по формуле

$$\varphi_i(x) = u_i(x, t_1), \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Точно также конечное температурное поле стержней в бесконтактный период будет являться начальной температурой для последующего их контактного состояния, т.е.

$$v_i(x, t_2) = u_{i+1}|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом, функции $f_i(x)$, используемые в качестве начальных условий для задач (2)...(4), будем принимать равными

$$f_1(x) = 1, \quad f_i(x) = v_{i-1}(x, t_2), \quad i = 2, 3, \dots \quad (9)$$

Итак, температурные поля стержней в их контактном и бесконтактном состояниях будут влиять друг на друга через начальные условия (8) и (9). Последовательность действий будет следующая:

решаем задачу (2)...(4) при $i = 1$ с начальным условием $u_1(x, t)|_{t=0} = 1$

решаем задачу (5)...(7) при $i = 1$, где $\varphi_1(x) = u_1(x, t_1)$

решаем задачу (2)...(4) при $i = 2$ с начальным условием из (9) при $i = 2$

решаем задачу (5)...(7) при $i = 2$ с начальным условием из (8) при $i = 2$

решаем задачу (2)...(4) при $i = 3$ с начальным условием из (9) при $i = 3$

решаем задачу (5)...(7) при $i = 3$ с начальным условием из (8) при $i = 3$

Для цикла с номером «к»:

решаем задачу (2)...(4) при $i = k$ с начальным условием из (9) при $i = k$

решаем задачу (5)...(7) при $i = k$ с начальным условием из (8) при $i = k$

решение задачи (2)...(4), когда стержни контактируют между собой.

Задачу (2)...(4), где выражения для $f_i(x)$ следует взять из (9), будем решать методом разделения переменных. Для этого сделаем замену

$$u_i = x + \tilde{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $\tilde{y}_i(x, t)$ – новая неизвестная функция. Подставляя u_i из (10) в (2)...(4), получим следующую задачу для \tilde{y}_i :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x^2}, \quad t \in [0, t_1], \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$\tilde{u}_i|_{t=0} = f_i(x) - x, \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$\tilde{u}_i|_{x=0} = 0, \quad \tilde{u}_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Вместо задачи (2)...(4) получили задачу (11) – (13) с однородными граничными условиями (13). Ее решение можно искать методом разделения переменных. В соответствии с этим методом запишем частное решение уравнения (11) в виде

$$\tilde{u}_i = F = X(x)T(t), \quad (14)$$

удовлетворяющее только двум однородным граничным условиям (13):

$$X(0) = X(1) = 0 \quad (15)$$

Подставим (14) в (11)

$$XT' = \frac{a^2}{\ell^2} X''T \quad (16)$$

Разделим (16) на XT :

$$\frac{T'}{T} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{X''}{X} \quad (17)$$

В левой части уравнения функция T'/T зависит только от времени t , а в правой части X''/X - зависит только от геометрической координаты x . Так как

t и x независимые переменные, то равенство (17) возможно, если $T'/T = \text{const}$ и $X''/X = \text{const}$. Поэтому из (17) получаем

$$\frac{T'}{T} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{X''}{X} = c \quad (18)$$

Предположим, что $c = 0$, тогда $T = \text{const}$ и $X = ax + b$. Подобное решение не представляет интереса, так как соответствует стационарному полю температур. При $c > 0$ будем иметь

$$T = Ae^{ct} \quad (19)$$

При такой зависимости температура с увеличением t в фиксированной точке неограниченно возрастает, что физически противоречиво рассматриваемому случаю. Остается последний вариант: $c < 0$, т.е. $c = -\lambda^2$ и тогда из (18) следует

$$\frac{T'}{T} = -\lambda^2, \quad \frac{X''}{X} = -\frac{\lambda^2 \ell^2}{a^2}, \quad (20)$$

где λ – пока неизвестная постоянная величина. Из (20) имеем два дифференциальных уравнения

$$T' + \lambda^2 T = 0; \quad X'' + \left(\frac{\lambda \ell}{a}\right)^2 X = 0 \quad (21)$$

Отсюда найдем

$$T = Ae^{-\lambda^2 t}; \quad X = C_1 \cos \frac{\lambda \ell}{a} x + C_2 \sin \frac{\lambda \ell}{a} x \quad (22)$$

Подставляя X из (22) в граничные условия (15), получим

$$X(0) = C_1 = 0; \quad X(1) = C_2 \sin \frac{\lambda \ell}{a} = 0 \quad (23)$$

Если положить $C_2 = 0$, то $X = 0$ и тогда из (14) будем иметь тривиальное решение $\tilde{u}_i = 0$, которое не удовлетворяет начальному условию (12), следовательно

$$\sin \frac{\lambda \ell}{a} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda \ell}{a} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Каждому значению n соответствует значение λ , поэтому величине λ присвоим номер и тогда будем иметь спектр $\{\lambda_n\}$, который называется спектром собственных значений, а величины λ_n - называются собственными значениями:

$$\lambda_n = \frac{an\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Положим в (22) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $A = A_n$ и $\lambda = \lambda_n$, где λ_n возьмем из (25). Тогда для $F(x, t)$ из (14) получим выражение

$$F(x, t) = A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin n\pi x \quad (26)$$

Функция $F(x, t)$ из (26) удовлетворяет уравнению (11) и однородным граничным условиям (13). Суперпозиция таких решений также будет удовлетворять уравнению (11) и граничным условиям (13), поэтому функцию $\tilde{u}_i(x, t)$ представим рядом

$$\tilde{u}_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin n\pi x \quad (27)$$

Такой вид функции $\tilde{y}_i(x, t)$ при любых A_{in} удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.11) и однородным граничным условиям (13). Постоянные A_{in} найдем при помощи начального условия (12), которое разложим в ряд Фурье по функциям $\{\sin n\pi x\}$. Перед этим разложением следует обратить внимание на то, что начальное условие (12) и граничные условия (13) не согласованы между собой при $x = 0$, так как в общем случае

$$f_i(0) \neq 0 \quad (28)$$

Т.е. функции $[f_i(x) - x]$ из начального условия (12) при $x = 0$ не обращаются в ноль, как того требуют граничные условия (13). Из теории рядов Фурье известно [3], если некоторая функция $f^*(x)$ на концах отрезка $[0, 1]$ обращается в ноль

$$f^*(0) = 0 \text{ и } f^*(1) = 0, \quad (29)$$

то ее ряд Фурье по $\{\sin n\pi x\}$ быстро сходится на всем отрезке $[0, 1]$. Если же имеет место соотношение

$$f^*(0) \neq 0, \quad f^*(1) = 0, \quad (30)$$

то ряд Фурье для такой $f^*(x)$ в точке $x = 0$ расходится, а в окрестности точки $x = 0$ сходится медленно. В остальных точках отрезка $(0, 1)$ ряд Фурье для $f^*(x)$ будет сходиться быстро. Медленная сходимость ряда означает, что для получения достоверного результата в окрестности точки $x = 0$ придется в используемых рядах учитывать достаточно большое количество слагаемых, гораздо большего, чем в остальных точках отрезка $(0, 1)$. Это обстоятельство создает дополнительные трудности при численной реализации получаемого решения задачи. Чтобы частично уменьшить указанные недостатки запишем вспомогательное разложение функции $(1-x)$ в ряд Фурье по функциям

$\{\sin n\pi x\}$ на отрезке $(0,1)$. Это разложение можно найти в справочнике [4] и оно имеет вид

$$1-x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (0,1] \quad (31)$$

Ряд (31) медленно сходится к 1 в окрестности точки $x=0$, в остальных точках отрезка $(0,1)$ этот ряд сходится быстро. Теперь можно приступить к завершению построения решения \tilde{u}_i задачи (11)...(13). Подставляя \tilde{u}_i из (27) в начальное условие (12), получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin n\pi x = f_i(x) - x \quad (32)$$

Отсюда найдем

$$A_{in} = 2 \int_0^1 [f_i(x) - x] \sin n\pi x dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Так как $f_1(x) = 1$, то с помощью (31) для A_{1n} будем иметь выражение

$$A_{1n} = 2 \int_0^1 (1-x) \sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \quad (34)$$

и потому из (10) найдем решение задачи (2)...(4) при $i=1$ в явном виде

$$u_1(x, t) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin n\pi x \quad (35)$$

Выражения для остальных A_{in} ($i \geq 2$) и $u_i(x, t)$ будут получены ниже.

Алгоритм получения решения задачи (2)...(4) при $i \geq 2$,
когда стержни контактируют между собой:

1 Начальное условие $f_i(x)$ следует взять из (9).

2 Из (33) вычислим A_m .

3 Из (27) определим $\tilde{y}_i(x, t)$.

4 Из (10) найдем $u_i(x, t)$ - решение задачи (2)...(4).

Решение задачи (5)...(7), когда стержни разомкнуты между собой.

В задаче (5)...(7) граничные условия смешанного типа, т.к. торец стержня при $x = 0$ теплоизолирован, а на другом конце все время поддерживается постоянная температура, равная 1. Эту задачу будем решать, как и предыдущую методом разделения переменных. В этой связи граничные условия задачи (7) необходимо привести к однородному виду, что достигается заменой

$$v_i(x, t) = 1 - \tilde{v}_i(x, t), \quad (36)$$

где \tilde{v}_i – новая неизвестная функция. Подставляя v_i из (36) в (5)...(7), получим следующую задачу для \tilde{v}_i :

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x^2}, \quad t \in [0, t_2], \quad x \in [0, 1] \quad (37)$$

$$\tilde{v}_i|_{t=0} = 1 - \varphi_i(x) \quad (38)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \tilde{v}_i|_{x=1} = 0 \quad (39)$$

Таким образом, вместо (5)...(7) имеем задачу (37)...(39) относительно другой неизвестной \tilde{v}_i с однородными граничными условиями (39). Частное решение $\Phi(x, t)$ уравнения (37) ищем в виде

$$\tilde{v}_i = \Phi(x, t) = X(x)T(t) \quad (40)$$

Как и в предыдущей задаче придем к выражениям (22), которые запишем в виде

$$T = Be^{-\lambda^2 t}, \quad X = D_1 \cos \frac{\lambda \ell}{a} x + D_2 \sin \frac{\lambda \ell}{a} x \quad (41)$$

После подстановки X из (41) в граничные условия из (39) получим уравнения

$$D_2 \frac{\lambda \ell}{a} = 0, \quad D_1 \cos \frac{\lambda \ell}{a} \ell = 0 \quad (42)$$

Отсюда найдем

$$D_2 = 0, \quad \frac{\lambda \ell}{a} = (2m-1) \frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Без ограничения общности рассмотрений можно положить $D_1 = 1$ и постоянную B в выражении для T из (41) переобозначить с добавлением индекса $i m$, т.е. $B \rightarrow B_{im}$. Тогда $\Phi(x, t)$ из (40) примет вид

$$\Phi(x, t) = B_{im} e^{-\left[\frac{a\pi}{2\ell}(2m-1)\right]^2 t} \cos \frac{\pi}{2} (2m-1)x \quad (44)$$

Функция $\Phi(x, t)$ из (44) удовлетворяет уравнению (37) и граничным условиям (39) при любых B_{im} . Суперпозиция таких решений тоже будет удовлетворять уравнению (37) и условиям (39), поэтому искомую функцию $\tilde{v}_i(x, t)$ представим рядом

$$\tilde{v}_i(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{im} e^{-\left[\frac{a\pi}{2\ell}(2m-1)\right]^2 t} \cos(2m-1) \frac{\pi}{2} x \quad (45)$$

Постоянные B_{im} найдем при помощи начального условия (38). Так как $\varphi_i(1) = 1$ при любом номере i , то правая часть (38) согласуется с граничным

условием (39) при $x = 1$, что обеспечивает хорошую сходимость ряда Фурье для начального условия $[1 - \varphi_1(x)]$ в этой точке.

Прежде, чем находить B_{im} , запишем вспомогательное разложение функции $(1-x)$ в ряд Фурье по $\cos(2m-1)\frac{\pi}{2}x$ на отрезке $[0,1]$:

$$1-x = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos(2m-1)\frac{\pi}{2}x, \quad x \in [0,1] \quad (46)$$

Теперь для нахождения B_{im} подставим $\tilde{v}_i(x,t)$ из (45) в начальное условие (38):

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{im} \cos(2m-1)\frac{\pi}{2}x = 1 - \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad (47)$$

Отсюда получим

$$B_{im} = 2 \int_0^1 [1 - \varphi_i(x)] \cos(2m-1)\frac{\pi}{2}x dx, \quad (48)$$

После подстановки B_{im} из (48) в (45) будем иметь решение задачи (5)...(7):

$$v_i(x,t) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} B_{im} e^{-\left[\frac{a\pi}{2\ell}(2m-1)\right]^2 t} \cos(2m-1)\frac{\pi}{2}x, \quad i = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Алгоритм получения решения задачи (5)...(7), когда стержни разомкнуты
 Функцию $\varphi_i(x)$ в начальном условии (6) найдем из равенства (8).

Определим B_{im} по формуле (48).

Из формулы (2.45) найдем $\tilde{v}_i(x,t)$.

По формуле (2.36) получим $v_i(x, t)$ - решение задачи (5)...(7).

Вычисления на первом и последующих циклах ($i = 1, 2, \dots$)

контакт – размыкание

При численной реализации предложенного выше метода определения температурных полей в рядах необходимо ограничиться некоторым конечным числом слагаемых. В суммах по индексу n будем считать $n = 1, 2, \dots, N$; а в суммах по индексу m положим $m = 1, 2, \dots, M$. В разложении (31), которое используется при решении задачи (2)...(4) для сомкнутых стержней, ряд в правой части медленно сходится в окрестности точки $x \approx 0$. Поэтому N определим как число слагаемых в этом ряде, которое необходимо взять, чтобы при $x = 0, 1$ (близкой точке к $x = 0$) левая и правая части отличались не более 10^{-3} . Отсюда получаем неравенство для нахождения N :

$$\left| 0,9 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin(n\pi \cdot 0,1) \right| \leq 10^{-3} \quad (50)$$

При решении задачи (5) ... (7), когда стержни разомкнуты, используется разложение (46). Данный ряд сходится всюду на отрезке $[0, 1]$. В точке $x = 0$ сходимость ряда (46) самая медленная, поэтому число слагаемых M в суммах с индексом m определим из условия, чтобы ошибка при вычислении ряда (46) не превышала 10^{-3} , т.е.

$$\left| 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(2m-1)^2} \right| \leq 10^{-3} \quad (51)$$

Выражение для поля температуры в стержнях при первом их контакте получим после подстановки A_{1n} из (34) в (26) при $i = 1$ и затем в (10)

$$u_1(x, t) = x + \sum_{n=1}^N A_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin n\pi x, \quad A_{1n} = \frac{2}{\pi n} \quad (52)$$

Полагая $t = t_1$ в (52), из (8) найдем начальные условия $\varphi_1(x)$ в явном виде для задачи (5)...(7), когда стержни разомкнуты

$$\varphi_1(x) = x + \sum_{n=1}^N A_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t_1} \sin n\pi x \quad (53)$$

Для нахождения решения $v_1(x, t)$ подставим $\varphi_1(x)$ из (53) в (48) при $i = 1$:

$$\sum_{m=1}^M B_{im} \cos(2m-1) \frac{\pi}{2} x = 1 - x - \sum_{n=1}^N A_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t_1} \sin n\pi x \quad (54)$$

Для дальнейших преобразований понадобится следующий интеграл

$$\int_0^1 \sin n\pi x \cos(2m-1) \frac{\pi}{2} x dx = \frac{4}{\pi} \frac{n}{4n^2 - (2m-1)^2} \quad (55)$$

Разлагая правую часть (54) в ряд Фурье по $\left\{ \cos(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right\}$ на отрезке $[0, 1]$, с помощью (46) и (55) найдем B_{im}

$$B_{im} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2m-1)^2} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^N A_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t_1} \frac{n}{4n^2 - (2m-1)^2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (56)$$

Решение задачи (5) ... (7), когда стержни находятся в разомкнутом состоянии, будет иметь вид (49).

При решении задачи (2) ... (4) для циклов $i \geq 2$, когда стержни контактируют, в начальное условие (32) подставим выражение $f_i(x)$ из (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin n\pi x = 1 - x - \sum_{m=1}^{\infty} B_{(i-1)m} e^{-\left[\frac{a\pi(2m-1)}{2\ell}\right]^2 t_2} \cos(2m-1) \frac{\pi}{2} x, \quad i = 2, 3, \dots \quad (57)$$

Отсюда с помощью (31) и интеграла (55) после разложения правой части (57) по $\{\sin n\pi x\}$ на отрезке $(0,1]$ получим

$$A_{in} = \frac{2}{\pi n} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^M B_{(i-1)m} e^{-\left[\frac{a\pi}{2\ell}(2m-1)\right]^2 t_2} \frac{n}{4n^2 - (2m-1)^2}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (58)$$

Решение задачи (2)...(4) для циклов $i \geq 2$, когда стержни контактируют, найдем из (10) и (27)

$$u_i = x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} e^{-\left(\frac{a n \pi}{\ell}\right)^2 t} \sin n\pi x, \quad i = 2, 3, \dots \quad (59)$$

где A_{in} следует взять из (58).

Решение всей задачи получаем вычислениями в следующей последовательности:

1 Сначала найдем A_{1n} и $u_1(x, t)$ из (52).

2 Вычислим B_{1m} по формуле (56) и $v_1(x, t)$ из (49) при $i = 1$.

1. Сначала найдем A_{1n} и $u_1(x, t)$ из (52).

2. Вычислим B_{1m} по формуле (56) и $v_1(x, t)$ из (49) при $i = 1$.

цикл

3. Вычислим A_{2n} из (57) и затем $u_2(x, t)$ из (59) при $i = 2$.

4. Вычислим B_{2m} из (56) и затем $v_2(x, t)$ из (49) при $i = 2$.

5. Вычислим A_{3n} из (57) и затем $u_3(x, t)$ из (59) при $i = 3$.

6. Вычислим B_{3m} из (56) и затем $v_3(x, t)$ из (49) при $i = 3$.

и т. д.

Следует отметить, что здесь приведено точное решение математической модели изучаемого процесса контактной теплопроводности. Расхождение между теоретическими расчетными результатами и экспериментальными данными являются следствием всевозможных упрощений в математической модели. Эти

расхождения естественно будут накапливаться с каждым циклом и они могут оказаться значительными, если число циклов велико. Тем не менее, представляет интерес проведение исследования по вопросу, за сколько циклов температурные профили в стержне начнут периодически повторяться и какой вид этих повторяющихся профилей имеет место в рассматриваемой системе.

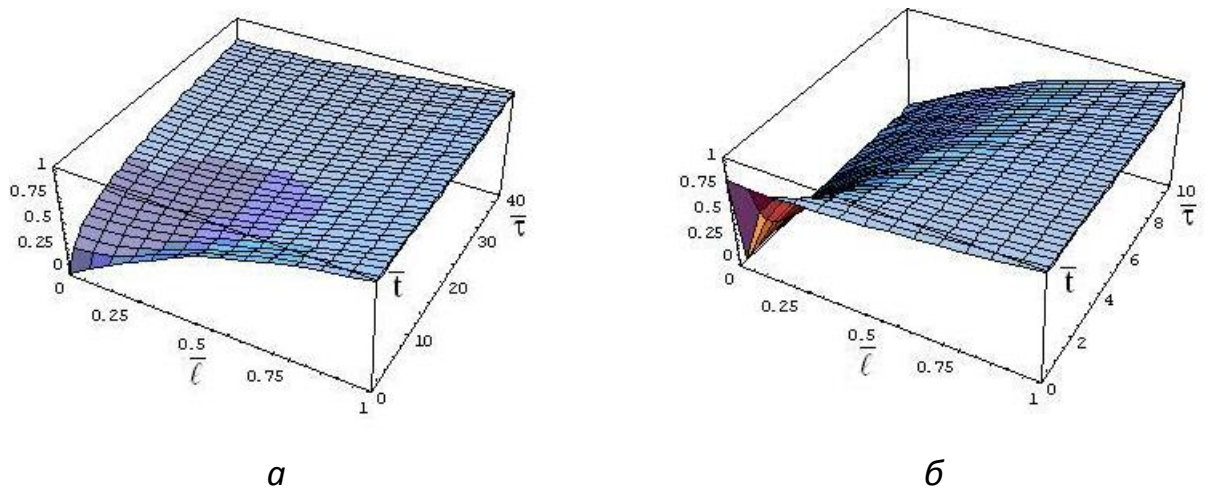


Рисунок 1 – Пространственное распределение относительной температуры в стержне в разъединенном (а) и соединенном (б) состоянии.

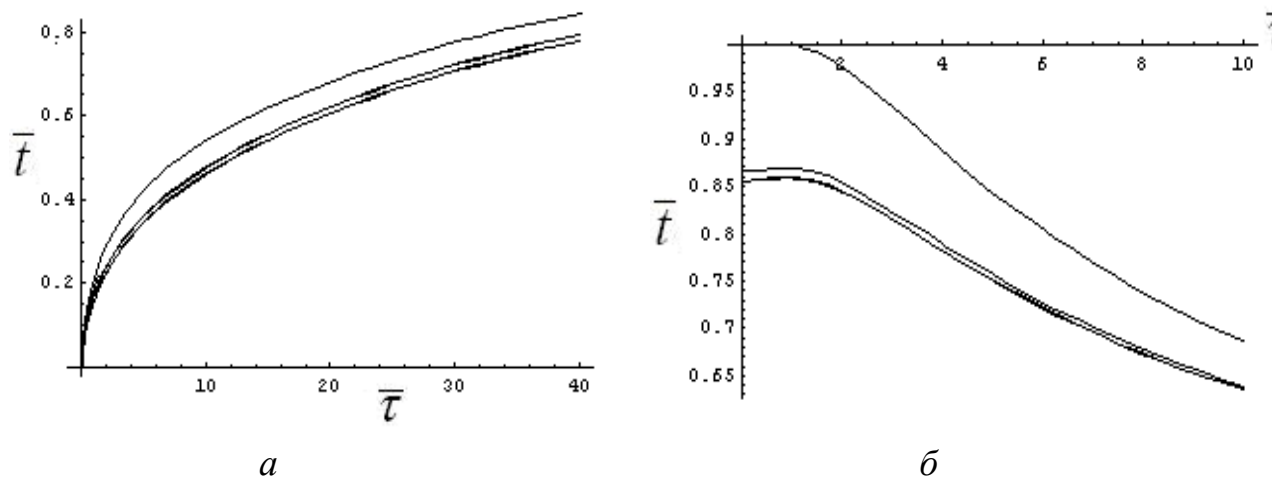


Рисунок 2 – Распределение относительной температуры в стержне в течение трех циклов в разъединенном (а) и соединенном (б) состоянии.

На рис. 1 и 2 приведены численные решения полученных выше аналитических зависимостей. Использовалась программа «Математик» версии 5.1. Из представленных значений относительной температуры в стержне наглядно просматривается физическая составляющая процесса. Отсюда же следует, что уже

на третьем цикле температурные профили в стержне начинают периодически повторяться.

Библиографический список

1 Шлыков, Ю. П., Контактное термическое сопротивление / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин, С. Н. Царевский. М. : Энергия, 1977. – 328 с.

2 Попов, В. М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений / В. М. Попов. М. : Энергия, 1971. – 216 с.

3 Тихонов, А. Н. Уравнение математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М. : Наука, 1972. – 735 с.

4 Гродштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм рядов и производных / И. С. Гродштейн, Н. М. Рыжик. М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

5 Попов, В. М. Регулирование процесса теплообмена в зоне контакта малоагруженных соединений / В. М. Попов, А. П. Новиков, Ерин О. Л // Лесотехнический журнал / ВГЛТА. 2012. № 2 С. 27-32.