УДК 517.982

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С. В. Писарева (ФГОУ ВПО ВГЛТА)

Исследование многих математических моделей в теории тепломассопереноса часто сводится к решению нестационарных задач для дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа.

Например (см. [1]), при $x \geq 0,\ \ t \geq 0$ ищется ограниченное решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \tag{1}$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям:

$$u(0,x) = g_0(x),$$
$$u(t,0) = 0.$$

При этом важным является вопрос о вычислении производной $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}$, характеризующей поток на границе раздела сред.

В тоже время многие из этих задач можно свести к эллиптическому случаю, когда находится решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \quad 0 \leq t \leq T < \infty\ . \tag{2}$$

с соответствующими граничными условиями при $t = 0$ и $t = T < \infty$ и линейным оператором A, действующим в некотором банаховом пространстве.

При такой постановке задачи естественно воспользоваться методом, изложенным в монографии С. Г. Крейна ([2], гл. III) при исследовании корректной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений вида (2) в предположении позитивности оператора $-A$. Это условие обеспечивает наличие квадратного корня $-(-A)^{1/2}$, в терминах которого даются определения решений, формируются соответствующие критерии корректной разрешимости этих задач и указываются представления их решений. В частности, в случае задачи Дирихле, когда решение уравнения (1) удовлетворяет условиям ограниченности при $t \to \infty$, решение имеет вид (см. [2], с.324):

$$u(t) = U_{1/2}(t) g_0, \tag{3}$$

где $U_{1/2}(t)$ сильно непрерывная полугруппа класса C_0, производящим оператором (генератором) которой является оператор $-(-A)^{1/2}$. Отсюда немедленно следует равенство:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} U_{1/2}(t) g_0 \Big|_{x=0} = -(-A)^{1/2} g_0. \tag{4}$$

Таким образом, для определения скорости тепломассопереноса на границе раздела сред достаточно знать оператор $-(-A)^{1/2}$.

Рассмотрим вопрос корректной разрешимости дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} - \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющего начально-краевым условиям:

$$u(0,x,y) = g_0(x,y),$$
$$u(t,x,y) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

В соответствии с [2] эту задачу можно свести к виду (2), где оператор $A_{x,y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ – дифференциальный оператор первого порядка, определенный в пространстве ограниченных функций, дифференцируемых в области $0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty$. Поставим задачу нахождения оператора $-(-A)^{1/2}$, соответствующей ему полугруппы и резольвенты. Для этого найдем резольвенту оператора $-A$, задаваемую равенством $R(\lambda, -A) = (\lambda I + A)^{-1}$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\lambda u(x,y)+\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}= f(x,y), \tag{6}$$

где $f(x,y)$ ограниченная функция при $0<x<+\infty$, $0<y<+\infty$. Зададим значения функции $u(x,y)$ при $x=0$ и $y=0$

$$u(0,y)=a(y), \quad u(x,0)=b(x).$$

Пусть преобразование Лапласа-Карсона, задаваемое равенством:

$$\bar{f}(p,q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x,y)dxdy,$$

дает нам следующие изображения функций:

$$u(x,y)=\bar{u}(p,q), \quad f(x,y)=\bar{f}(p,q), \quad a(y)=\bar{a}(q), \quad b(x)=\bar{b}(p). \tag{7}$$

В обозначениях (7) операторное изображение уравнения (6) имеет вид:

$$\lambda\bar{u}(p,q)+p[\bar{u}(p,q)-\bar{a}(q)]+q[\bar{u}(p,q)-\bar{b}(p)]=\bar{f}(p,q)$$

или

$$(\lambda+p+q)\bar{u}(p,q)=\bar{f}(p,q)+p\bar{a}(q)+q\bar{b}(p),$$

откуда получаем

$$\bar{u}(p,q)=\frac{\bar{f}(p,q)}{\lambda+p+q}+\frac{p\bar{a}(q)}{\lambda+p+q}+\frac{q\bar{b}(p)}{\lambda+p+q}. \tag{8}$$

Вычислим оригиналы от слагаемых правой части равенства (8). Используя формулы операционного исчисления:

$$\frac{p}{p+q}\bar{f}(q)=\begin{cases}0, & при \quad 0\le y\le x,\\ f(y-x), & при \quad 0\le x<y,\end{cases}$$

$$\frac{q}{p+q}\bar{f}(p)=\begin{cases}0, & при \quad 0\le x\le y,\\ f(x-y), & при \quad 0\le y<x,\end{cases}$$

и теорему сдвига для изображения

$$\frac{p}{p+a}\cdot\frac{q}{q+b}\bar{f}(p+a,q+b)=e^{-ax-by}f(x,y),$$

найдем оригиналы второго и третьего слагаемых

$$\frac{p\bar{a}(q)}{\lambda+p+q}=\frac{p}{\lambda+p}\cdot\frac{\lambda+p}{\lambda+p+q}\bar{a}(q)=\frac{p}{\lambda+p}\cdot\left(\begin{cases}0, & при \quad 0\le y\le x,\\ a(y-x), & при \quad 0\le x<y\end{cases}\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & при \quad 0\le y\le x,\\ e^{-\lambda x}a(y-x), & при \quad 0\le x<y.\end{cases} \tag{9}$$

$$\frac{q\bar{b}(p)}{\lambda+p+q}=\frac{q}{\lambda+q}\cdot\frac{\lambda+p}{\lambda+p+q}\bar{b}(p)=\frac{q}{\lambda+q}\cdot\left(\begin{cases}0, & при \quad 0\le x\le y,\\ b(x-y), & при \quad 0\le y<x\end{cases}\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & при \quad 0\le x\le y,\\ e^{-\lambda y}b(x-y), & при \quad 0\le y<x.\end{cases} \tag{10}$$

Найдем оригинал первого слагаемого, используя теорему сдвига для изображения:

$$\frac{\bar{f}(p,q)}{\lambda+p+q}=\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+q+\lambda}\bar{f}(p,q)=\frac{1}{p}\left(e^{-(q+\lambda)x}\bar{f}(p,q)\right).$$

Затем применим к первому слагаемому теорему умножения, которая гласит, что если $\bar{f}_1(p,q)=f_1(x,y)$ и $\bar{f}_2(p,q)=f_2(x,y)$, то имеет место операционное соответствие:

$$\int_0^x \int_0^y f_1(x-\xi, y-\eta) f_2(\xi,\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{pq} \bar{f}_1(p,q) \bar{f}_2(p,q).$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{f}(p,q)}{\lambda+p+q} = \int_0^x e^{-(q+\lambda)\xi} \bar{f}(x-\xi,q)d\xi = \int_0^x e^{-\lambda\xi} e^{-q\xi} \bar{f}(x-\xi,q)d\xi.$$

Далее, применив теорему сдвига для оригинала, которая гласит, что

$$e^{-ap-bq} \bar{f}(p,q) = \begin{cases} 0, & при \quad x<a \quad или \quad y<b, \\ f(x-a,y-b), & при \quad x \ge a, y > b, \end{cases}$$

получим оригинал первого слагаемого

$$\frac{\bar{f}(p,q)}{\lambda+p+q} = \begin{cases} 0, & при \quad x<\xi \quad или \quad y<\xi, \\ \int_0^x e^{-\lambda x} f(x-\xi,y-\xi)d\xi, & при \quad x \ge \xi, y \ge \xi \end{cases} =$$

$$= \int_0^{\min\{x,y\}} e^{-\lambda x} f(x-\xi,y-\xi)d\xi.$$

Учитывая последнее равенство, а также равенства (9) и (10), видим, что искомое решение уравнения (6) представимо в следующем виде:

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{-\lambda y} b(x-y) + \int_0^y e^{-\lambda\xi} f(x-\xi,y-\xi)d\xi, & при \quad x>y, \\ e^{-\lambda x} a(y-x) + \int_0^x e^{-\lambda\xi} f(x-\xi,y-\xi)d\xi, & при \quad x<y. \end{cases}$$

Рассмотрим частный случай, когда $a(y) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$. Резольвента оператора $-A$ принимает вид:

$$R(\lambda,-A)f=\begin{cases}\int\limits_0^y e^{-\lambda\xi}f(x-\xi,y-\xi)d\xi, & при \quad x>y,\\ \int\limits_0^x e^{-\lambda\xi}f(x-\xi,y-\xi)d\xi, & при \quad x<y\end{cases}=$$

$$=\int\limits_0^{\min\{x,y\}}e^{-\lambda x}f(x-\xi,y-\xi)d\xi.$$

Оценим резольвенту в пространстве ограниченных функций:

$$\|R(\lambda,-A)\|\le\sup_{f\ne0}\frac{\|R(\lambda,-A)\|}{\|f\|}=\sup_{f\ne0}\frac{\sup\limits_{x,y>0}\int\limits_0^{\min\{x,y\}}e^{-\lambda x}f(x-\xi,y-\xi)d\xi}{\|f\|}\le$$

$$\le\sup_{f\ne0}\frac{\int\limits_0^{\min\{x,y\}}e^{-\lambda x}\sup\limits_{x,y>0}\big(f(x-\xi,y-\xi)\big)d\xi}{\|f\|}=\sup_{f\ne0}\frac{\int\limits_0^{\min\{x,y\}}e^{-\lambda x}\|f\|d\xi}{\|f\|}=$$

$$=\int\limits_0^{\min\{x,y\}}e^{-\lambda x}d\xi=\left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_0^{\min\{x,y\}}=\frac{e^{-\lambda\min\{x,y\}}}{-\lambda}-\frac{e^{-\lambda\cdot0}}{-\lambda}=\frac{1}{\lambda}-\frac{e^{-\lambda\min\{x,y\}}}{\lambda}.$$

Итак, $\|R(\lambda,-A)\|<\dfrac{1}{\lambda}$ при $\mathrm{Re}(\lambda)>0$. Следовательно, по теореме Хилле-Филлипса-Миадеры (см.[3], гл.4) оператор $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$.

Построим полугруппу с помощью интеграла Коши:

$$U(t)f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}e^{\lambda t}R(\lambda,-A)f\,d\lambda \qquad (f\in D(-A)).$$

В нашем случае получаем:

$$U(t)f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t} \int_{0}^{\min\{x,y\}} e^{-\lambda\xi} f(x-\xi, y-\zeta)d\xi\, d\lambda =$$
$$= \int_{0}^{\min\{x,y\}} f(x-\xi, y-\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda(t-\xi)} d\lambda\right]d\xi.$$

Воспользовавшись фактом, что изображение дельта-функции Дирака имеет вид:

$$\delta(t-a) = e^{-ap} \quad (a>0),$$

а затем тем свойством дельта-функции, что

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

при $t_0 \in [a;b]$, получаем

$$U(t)f = \int_{0}^{\min\{x,y\}} f(x-\xi, y-\zeta)\cdot\delta(t-\xi)d\xi$$

и далее

$$U(t)f = \begin{cases} f(x-t, y-t), при \quad t<\min\{x,y\}, \\ 0, при \quad t>\min\{x,y\}. \end{cases} \tag{11}$$

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого $n>0$ оператор J_n (см. [4], стр. 334):

$$J_n = (I - n^{-1}(-A))^{-1} = nR(n,-A),$$

для которого выполняется условие

$$-AJ_n f = n(J_n - I)f = nJ_n f - nf\,. \tag{12}$$

Покажем, что оператор $-A = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ действительно является производящим оператором полугруппы $U(t)$, задаваемой равенством (11). Введем семейство функций $F_n(x,y)$ с помощью равенства:

$$F_n(x,y) = (J_n f)(x,y) = nR(n,-A)f = n\int_0^\infty e^{-nt}U(t)\,fdt.$$

В соответствии с (11) получаем:

$$F_n(x,y) = n\int_0^{\min\{x,y\}} e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt.$$

Рассмотрим случай, когда $x < y$. Найдем частную производную $F_n(x,y)$ по переменной x:

$$\frac{\partial}{\partial x}F_n(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(n\int_0^x e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt\right).$$

Сделав в интеграле замену переменной $x - t = s$ и воспользовавшись тем, что, если

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx,$$

то

$$F'_y(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y), \qquad (13)$$

Получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}F_n(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-n\int_x^0 e^{-n(x-s)}\ f(s, y-x+s)ds\right) =$$

$$= -n\left(\int_x^0 \left(-ne^{-n(x-s)}\ f(s, y-x+s) + e^{-n(x-s)} f_x'(s, y-x+s)(-1)\right)ds + \right.$$

$$\left. + e^{-n(x-0)} f(0, y-x+0)\cdot 0 - e^{-n(x-x)} f(x, y-x+x)\cdot 1\right).$$

Сделав обратную замену, окончательно находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_n(x, y) = -n\left(n\int_0^x e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt + \int_0^x e^{-nt}\ f_x'(x-t, y-t)dt\right) + nf(x, y).$$

Найдем ту же частную производную другим образом, используя формулу (13):

$$\frac{\partial}{\partial x} F_n(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(n\int_0^x e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt\right) =$$

$$= n\left(\int_0^x e^{-nt}\ f_x'(x-t, y-t)dt + e^{-nx} f(x-x, y-x) - e^{-n\cdot 0} f(x-0, y-0)\cdot 0\right) =$$

$$= n\int_0^x e^{-nt}\ f_x'(x-t, y-t)dt + ne^{-nx} f(0, y-x).$$

Сложив два результата, получаем:

$$2\frac{\partial}{\partial x} F_n(x, y) = -nF_n(x, y) + nf(x, y) + ne^{-nx} f(0, y-x).$$

Найдем частную производную $F_n(x, y)$ по переменной y также двумя способами. В первом сделаем замену переменной $y-t=s$ и воспользуемся формулой (13):

$$\frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(n\int_0^x e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt\right) =$$

$$= -n\Big[\int_y^{y-x} (-n\cdot e^{-n(y-s)}\ f(x-y+s, s) + e^{-n(y-s)}\ f_y'(x-y+s, s)\cdot(-1))ds +$$

$$+ e^{-n(y-y+x)}\ f(x-y+y-x, y-x)\cdot 1 - e^{-n(y-y)}\ f(x-y+y, y)\cdot 1\ \Big] =$$

$$= -n\left[n\int_0^x e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt + \int_0^x e^{-nt}\ f'_y(x-t, y-t)dt + e^{-nx} f(0, y-x) - f(x, y)\right].$$

Найдем частную производную $F_n(x, y)$ по переменной y вторым способом, используя только формулу (13):

$$\frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(n\int_0^x e^{-nt}\ f(x-t, y-t)dt\right) = n\int_0^x e^{-nt}\ f'_y(x-t, y-t)dt.$$

Сложим два результата для частной производной $F_n(x, y)$ по переменной y:

$$2\frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y) = -nF_n(x, y) - ne^{-nx} f(0, y-x) + nf(x, y).$$

Просуммируем частные производные:

$$2\frac{\partial}{\partial x} F_n(x, y) + 2\frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y) = -2nF_n(x, y) + 2nf(x, y).$$

Итак, при $x < y$ мы получаем:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(F_n(x, y)\right) = nF_n(x, y) - nf(x, y). \tag{14}$$

Аналогичный результат мы получим при $x > y$. Следовательно, равенство (14) верно для любых $x > 0, y > 0$. Сравнивая полученное равенство с общей формулой (12), мы находим, что

$$-AF_n(x, y) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)F_n(x, y).$$

Поскольку $R(J_n) = R(R(n, -A)) = D(-A)$, отсюда следует, что

$$-A\varphi(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\varphi(x,y) \quad \text{при любом } \varphi\in D(-A).$$

Обратно, пусть теперь функции $\varphi(x,y)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ принадлежат пространству функций, ограниченных в области $0<x<+\infty$, $0<y<+\infty$. Покажем, что $\varphi\in D(-A)$ и $-A\varphi(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\varphi(x,y)$. С этой целью определим с помощью соотношения:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-n\varphi(x,y)=-nf(x,y)$$

вспомогательную функцию $f(x,y)$. Полагая $F_n(x,y)=(J_n f)(x,y)$, мы, согласно полученным выше результатам, получим равенство:

$$-\frac{\partial}{\partial x}F_n(x,y)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_n(x,y)-nF_n(x,y)=-nf(x,y).$$

Значит, функция $w(x,y)=\varphi(x,y)-F_n(x,y)$ удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}=nw(x,y).$$

Найдем решение этого дифференциального уравнения в частных производных согласно [5] (см. стр. 343). Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая этому уравнению в частных производных есть:

$$dx=dy=-\frac{dw}{nw}.$$

Система первых интегралов имеет вид:

$$x-y=C_1,\quad y+\frac{\ln w}{n}=C_2.$$

Решение, содержащее произвольную функцию Ψ, будет иметь вид:

$$\Psi\left(x-y, y+\frac{\ln w}{n}\right)=0.$$

Разрешая последнее равенство относительно второго аргумента, а затем относительно w, получим:

$$w(x,y)=Ce^{n(\psi(x-y)-y)},$$

где ψ – произвольная функция. Но функция $w(x,y)$ должна принадлежать пространству ограниченных функций, а это может быть только при значении $C=0$. Следовательно, $\varphi(x,y)=F_n(x,y)\in D(-A)$.

Таким образом, область определения $D(-A)$ оператора $-A$ совпадает с множеством ограниченных в области $0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty$ функций $\varphi(x,y)$, частные производные первого порядка которых также принадлежат этому пространству, и для таких функций $-A\varphi(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\varphi(x,y)$. Это означает, что дифференциальный оператор $-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $U(t)$.

В соответствии с [4] (стр. 357) построим полугруппу $U_{1/2}(t)f=U(t,-(-A)^{1/2})$, используя формулу

$$U_\alpha(t)f=\begin{cases}\int\limits_0^\infty F_{t,\alpha}(s)U(s)f ds, & при \quad t>0,\\ f, & при \quad t=0,\end{cases}$$

где функция $F_{t,\alpha}(s)$ определяется следующим образом:

$$F_{t,\alpha}(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{zs-tz^{\alpha}}dz, при \quad s\geq 0,\\ 0, \quad при \quad s<0,\end{cases} \tag{15}$$

где $\delta>0$, $t>0$, $0<\alpha<1$ и ветвь z^{α} выбрана так, что $\mathrm{Re}(z^{\alpha})>0$ при $\mathrm{Re}(z)>0$. Перейдем в формуле (15) от интегрирования по прямой $z=\sigma>0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z=re^{-i\Theta}$ $(0<r<\infty)$ и $z=re^{i\Theta}$ $(0<r<\infty)$, где $\dfrac{\pi}{2}\leq\Theta\leq\pi$, тогда

$$F_{t,\alpha}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(sr\cos\Theta-tr^{\alpha}\cos\alpha\Theta)\times\sin(sr\sin\Theta-tr^{\alpha}\sin\alpha\Theta+\Theta)dr.$$

Если $\alpha=\dfrac{1}{2}$, то, взяв значение $\Theta=\pi$, получим из последней формулы выражение:

$$F_{t,1/2}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-sr}\sin(tr^{1/2})dr=\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi}t(2^3\sqrt{s})^{-3}\cdot e^{\frac{-t^2}{4s}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t}{s^{3/2}}\cdot e^{\frac{-t^2}{4s}}.$$

Найдем выражение для полугруппы:

$$U_{1/2}(t)f=\int_0^{\infty}F_{t,1/2}(s)U(s)fds=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t\cdot e^{\frac{-t^2}{4s}}\cdot s^{-3/2}U(s)fds.$$

Учитывая формулу (11), получим:

$$U_{1/2}(t)f=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t\cdot e^{\frac{-t^2}{4s}}\cdot s^{-3/2}f(x-s,y-s)ds \qquad \text{при } s<\min\{x,y\}.$$

Используя представление решения (3), получаем решение задачи (5)

$$u(t)=U_{1/2}(t)g_0=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t\cdot e^{\frac{-t^2}{4s}}\cdot s^{-3/2}g_0(x-s,y-s)ds \quad \text{при } s<\min\{x,y\}.$$

Построим генератор полугруппы

$$-(-A)^{1/2}f=\lim_{h\to 0+}\frac{(U_{1/2}(h)-I)f}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left\{\frac{h}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{\frac{-h^2}{4s}}s^{-3/2}f(x-s,y-s)ds-f(x,y)\right\}.$$

Вычислим следующий интеграл, произведя в нем замену переменной $\frac{1}{s}=x$ и использовав равенство $\int_0^{\infty}x^n e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$,

$$\int_0^{\infty}e^{\frac{-h^2}{4s}}s^{-3/2}ds=-\int_{\infty}^{0}x^{3/2}x^{-2}e^{\frac{-h^2}{4}\cdot x}dx=\int_0^{\infty}x^{-1/2}e^{\frac{-h^2}{4}\cdot x}dx=$$

$$=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{h^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\frac{2\sqrt{\pi}}{h}.$$

Окончательно получаем выражение для оператора:

$$-(-A)^{1/2}f=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left\{\frac{h}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{\frac{-h^2}{4s}}s^{-3/2}f(x-s,y-s)ds-\frac{h}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{\frac{-h^2}{4s}}s^{-3/2}f(x,y)ds\right\}=$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{\frac{-h^2}{4s}}s^{-3/2}\left[f(x-s,y-s)-f(x,y)\right]ds.$$

В соответствии с представлением (4), вычислим производную:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=-(-A)^{1/2}g_0=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{\frac{-h^2}{4s}}}{s^{3/2}}\left[g_0(x-s,y-s)-g_0(x,y)\right]ds.$$

В заключение, найдем резольвенту оператора $-(-A)^{1/2}$, используя формулу Като:

$$\left(\mu I-\hat{A}_\alpha\right)^{-1}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty (rI-A)^{-1}\frac{r^\alpha}{\mu^2-2\mu r^\alpha\cos\alpha\pi+r^{2\alpha}}dr.$$

Найдем резольвенту:

$$R(\mu,-(-A)^{1/2})=\left(\mu I+(-A)^{1/2}\right)^{-1}f=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}\int_0^\infty R(r,-A)f\cdot\frac{r^{1/2}}{\mu^2-2\mu r^{1/2}\cos\frac{\pi}{2}+r^{2\cdot 1/2}}dr=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\min\{x,y\}} e^{-r\xi}f(x-\xi,y-\xi)d\xi\cdot\frac{r^{1/2}}{\mu^2+r^{2\cdot 1/2}}dr=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\min\{x,y\}} f(x-\xi,y-\xi)\int_0^\infty\frac{e^{-r\xi}r^{1/2}}{\mu^2+r}drd\xi. \qquad (16)$$

Вычислим внутренний интеграл, сделав в нем замену переменной $\mu^2+r=x$, $r=x-\mu^2$, $dr=dx$ и переобозначив $\mu^2=u$,

$$J=\int_0^\infty\frac{e^{-r\xi}\sqrt{r}}{\mu^2+r}dr=\int_{\mu^2}^\infty\frac{e^{-\xi(x-\mu^2)}\sqrt{x-\mu^2}}{x}dx=e^{u\xi}\int_u^\infty\frac{e^{-\xi x}\sqrt{x-u}}{x}dx.$$

Воспользуемся формулой из таблицы интегралов (см. [6], стр.329):

$$\int_u^\infty\frac{\sqrt{x-u}\cdot e^{-\beta x}}{x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-u\beta}-\pi\sqrt{u}\cdot\left[1-\Phi\left(\sqrt{u\beta}\right)\right],\ \text{где } u>0,\ \operatorname{Re}\beta>0.$$

$$J=e^{u\xi}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}e^{-u\xi}-\pi\sqrt{u}\cdot\left[1-\Phi\left(\sqrt{u\xi}\right)\right]\right]=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}-e^{-\mu^2\xi}\pi\sqrt{\mu^2}\cdot\left[1-\Phi\left(\sqrt{\mu^2\xi}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}-e^{-\mu^2\xi}\pi\mu\cdot\left[1-\Phi\left(\mu\sqrt{\xi}\right)\right]$$

Данный результат подставим в равенство (16):

$$\left(\mu I-(-A)^{1/2}\right)^{-1} f=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\min\{x,y\}} f(x-\xi,y-\xi)\left[\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}-e^{-\mu^2\xi}\pi\mu\cdot\left[1-\Phi\left(\mu\sqrt{\xi}\right)\right]\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^{\min\{x,y\}} f(x-\xi,y-\xi)\left[\sqrt{\frac{1}{\pi\xi}}-e^{-\mu^2\xi}\mu\cdot\left[1-\Phi\left(\mu\sqrt{\xi}\right)\right]\right]d\xi.$$

Библиографический список

1 Бабенко, Ю. И. Тепломассообмен. Методы расчета тепловых диффузионных потоков [Текст] / Ю. И. Бабенко. – Л. : Химия, 1986. – 144 с.

2 Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / С. Г. Крейн. – М. : Наука,1967. – 464 с.

3 Красносельский, М. А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций [Текст] / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. – М. : Наука, 1966. – 498 с.

4 Иосида, К. Функциональный анализ [Текст] : Учебник / К. Иосида, пер. с англ. В. М. Волосова. – М. : Мир, 1965. – 624 с.

5 Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В. В. Степанов. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 468 с.

6 Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 1100 с.