УДК 517.968

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. В. Сапронов (ВГЛТА)

Несмотря на немалое число публикаций, посвященных изучению уравнений Вольтерра, данная тематика остается актуальной и представляет известный интерес. Существенное развитие эта теория получила в серии работ [1-3], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и II рода, скалярные решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида. В последние годы исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в бесконечномерных банаховых пространствах [4-9]. В работах [10, 11] изучалось интегральное уравнение Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в пространстве суммируемых на $[0,\delta]$ функций со значениями в банаховом пространстве E. Данная статья является продолжением этих работ.

В вещественном банаховом пространстве E заштрихуем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_E .$$

В пространстве $Q([0,\delta],E)$ ограниченных измеримых в норме E на $[0,\delta]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{Q([0,\delta],E)} = \sup_{0\le x\le\delta} \|\psi(x)\|_E .$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = f(x), \quad (0\le x\le\delta) \tag{1}$$

в $L_1([0,\delta],E)$, где $K(x,t)$ – заданная функция со значениями в $L(E)$, имеющая вид

$$K(x,t)=\left[\frac{1}{2}c_2x^2-c_2xt+\frac{1}{2}c_2t^2\right]+\left[c_1x^3-c_1x^2t\right]+\left[3c_0x^4-2c_0x^3t\right], \tag{2}$$

c_0, c_1, c_2 – линейные ограниченные операторы, действующие в E.

Введем в рассмотрение операторный пучок

$$B_\upsilon=c_0-\frac{1}{\upsilon}c_1+\frac{1}{\upsilon^2}c_2. \tag{3}$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) пучок (3) имеет характеристическое число υ $(\upsilon<0)$;

2) характеристическому числу υ соответствует собственный вектор e без присоединенных к нему векторов;

3) оператор c_0 имеет ограниченный обратный.

Тогда для уравнения (1) существует решение вида

$$u(x)=\frac{1}{x^2}e^{\upsilon\frac{1}{x}}\left[x^{-4}\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\right]+f_2(x), \tag{4}$$

где a_i $(i=0,1,2)$ – искомые коэффициенты в E, функция $f_2(x)$ является ограниченной измеримой на $[0,\delta]$ со значениями в банаховом пространстве E.

Подставляя (4) $\left(f_2(x)=0\right)$ в левую часть уравнения (1) и интегрируя по частям получаем

$$\begin{gathered}
e^{\upsilon\frac{1}{x}}\left\{-\frac{1}{\upsilon^3}c_2a_1x-\frac{1}{\upsilon^3}c_2a_2x^2+\frac{1}{\upsilon^4}6c_2a_0x+\frac{1}{\upsilon^4}3c_2a_1x^2-\frac{1}{\upsilon^5}12c_1a_0x^2-\right.\\
-\frac{1}{\upsilon^3}c_2a_0+\frac{1}{\upsilon^2}c_1a_0+\frac{1}{\upsilon^2}c_1a_1x+\frac{1}{\upsilon^2}c_1a_2x^2-\frac{1}{\upsilon^3}6c_1a_0x-\frac{1}{\upsilon^3}4c_1a_1x^2-\\
-\frac{1}{\upsilon^3}2c_1a_2x^3+\frac{1}{\upsilon^4}18c_1a_0x^2+\frac{1}{\upsilon^4}6c_1a_1x^3-\frac{1}{\upsilon^5}24c_1a_0x^3-\frac{1}{\upsilon}c_0a_0-\\
-\frac{1}{\upsilon}c_0a_1x-\frac{1}{\upsilon}c_0a_2x^2+\frac{1}{\upsilon^2}6c_0a_0x+\frac{1}{\upsilon^2}5c_0a_1x^2+\frac{1}{\upsilon^2}4c_0a_2x^3-\frac{1}{\upsilon^3}24c_0a_0x^2-\\
\left.-\frac{1}{\upsilon^3}14c_0a_1x^3-\frac{1}{\upsilon^3}6c_0a_2x^4+\frac{1}{\upsilon^4}60c_0a_0x^3+\frac{1}{\upsilon^4}18c_0a_1x^4-\frac{1}{\upsilon^5}72c_0a_0x^4\right\}
\end{gathered} \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при x^0, x, x^2, x^3, x^4 в (5) к нулю, получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_i $\left(i=0,1,2\right)$

$$\begin{aligned}
&1)\ B_\upsilon a_0=0;\\
&2)\ B_\upsilon a_1=0;\\
&3)\ B_\upsilon a_2=-B'_\upsilon a_1-\frac{12}{\upsilon^4}c_2a_0+\frac{18}{\upsilon^3}c_1a_0-\frac{24}{\upsilon^2}c_0a_0;\\
&4)\ \frac{2}{\upsilon}B'_\upsilon a_2=\left[\frac{8}{\upsilon^4}c_1a_1-\frac{14}{\upsilon^5}c_2a_1\right]+\left[\frac{24}{\upsilon^5}c_1a_0-\frac{60}{\upsilon^4}c_0a_0\right];\\
&5)\ -\frac{1}{\upsilon^3}6c_0a_2+\frac{18}{\upsilon^4}c_0a_1-\frac{72}{\upsilon^5}c_0a_0=0.
\end{aligned}\tag{6}$$

Пусть $a_0=\upsilon^2e$, $a_1=c_1e$. Для разрешимости третьего уравнения находим c_1

$$c_1=\frac{\left(\frac{12}{\upsilon^4}c_2a_0-\frac{18}{\upsilon^3}c_1a_0+\frac{24}{\upsilon^2}c_0a_0,e^*\right)}{\left(B'_\upsilon e,e^*\right)}=6\upsilon.$$

Тогда оно принимает вид $B_\upsilon a_2=0$ и, следовательно, $a_2=c_2e$ будет его решением. Если

$$c_2=\frac{\left\{\left(\left[\frac{8}{\upsilon^4}c_1a_1-\frac{14}{\upsilon^5}c_2a_1\right]+\left[\frac{1}{\upsilon^5}24c_1a_0-\frac{60}{\upsilon^4}c_0a_0\right],e^*\right)\right\}}{2\left(B'_\upsilon e,e^*\right)}=6,$$

то четвертое и пятое равенства в (6) также справедливы.

Заметим, что e^* является собственным вектором сопряженного оператора B_υ^*, то есть $B_\upsilon^*e^*=0$.

Следовательно,

$$u\left(x\right)=e^{\upsilon\frac{1}{x}}\left[x^{-4}\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\right],$$

будет решением однородного уравнения

$$\int_0^x K(x,t)u(t)\,dt = 0.$$

Перейдем к нахождению частного решения уравнения (1) $f_2(x)$.

Пусть $u(x) = V^{(2)}(x)$, тогда уравнение (1) интегрированием по частям сводится к уравнению

$$c_0 x^4 V'(x) + \left(2c_0 x^3 + c_1 x^2\right)V(x) + c_2 \int_0^x V(t)\,dt = f(x). \tag{7}$$

Рассмотрим систему равенств

$$\begin{cases} x^2 V(x) + \upsilon \int_0^x V(t)\,dt = \int_0^x V_2(t)\,dt \\ x^2 V_2(x) + \dfrac{c_0^{-1} c_2}{\upsilon} \int_0^x V_2(t)\,dt = c_0^{-1} f(x). \end{cases} \tag{8}$$

Нетрудно показать, что если $\left(V_1(x), V_2(x)\right)$ – решение системы уравнений (8), то $V_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$c_0 x^4 V_1' + \left(2c_0 x^3 + c_0 \upsilon x^2 + \frac{c_2}{\upsilon} x^2\right)V_1 + c_2 \int_0^x V_1(t)\,dt = f(x). \tag{9}$$

Пусть $c_0 \upsilon + \dfrac{c_2}{\upsilon} = c_1$, тогда $V_1(x)$ является решением уравнения (7). Следовательно, $V_1^{(2)}(x)$ будет частным решением уравнения (1)

$$f_2(x) = V_1^{(2)}(x) = \left(-\frac{\upsilon}{x^2} e^{\upsilon \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^2}} \int_\delta^x \frac{e^{\upsilon \int_\delta^{\tau} \frac{dt}{t^2}}}{\tau^2} e^{\frac{1}{\upsilon} \int_\tau^{\delta} \frac{dt}{t^2} c_0^{-1} c_2} \int_\delta^{\tau} \frac{e^{\frac{1}{\upsilon} \int_\delta^{s} \frac{dt}{t^2} c_0^{-1} c_2}}{s^2} c_0^{-1} f(s)\,ds\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{\upsilon} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^2} c_0^{-1} c_2} \int_\delta^x \frac{e^{\frac{1}{\upsilon} \int_\delta^{s} \frac{dt}{t^2} c_0^{-1} c_2}}{s^2} c_0^{-1} f(s)\,ds \right)^2 .$$

Библиографический список

1 Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР – 1977. – № 235 (4) – С. 772-774.

2 Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР – 1978. – № 240 (2) – С. 268-271.

3 Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – № 19 (4) – С. 970-988.

4 Крейн, С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Докл. РАН – 1997. – № 355 (4) – С. 450-452.

5 Крейн, С. Г. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // УМН – 1995. – № 50 (4) – С. 140.

6 Krein, S. G. Singular integral Volterra equations / S. G. Krein // Abstracts of Internat. Congress of Math. – 1994. – С. 125.

7 Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equations with regular singularity / S. G. Krein, I. V. Sapronov // Укр. матем. журн. – 1997. – № 49 (3) – С. 424-432.

8 Сапронов, И. В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика – 2004. – № 6 – С. 48-58.

9 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика – 2005. – № 2 – С. 81-83.

10 Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика – 2007. – № 11 – С. 45-55.

11 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика – 2011. – № 1 – С. 59-71.