УДК 517.9

# УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАСТВАХ С «ВЕСОМ»

П. Н. Зюкин, И. В. Сапронов (ВГЛТА)

Рассматривается дифференциальное уравнение Эйлера

$$x^r y^{(r)} + x^{r-1} a_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + x a_1 y' + a_0 y = h(x), \qquad (1)$$

где $x \in [0,1]$, $a_0, a_1, ..., a_{r-1}$ – комплексные числа, $h(x)$ – определенная на отрезке [0,1] комплекснозначная функция. Уравнение (1) вырождается при $x = 0$. Для таких уравнений является важным выяснение условий существования решений, гладких вплоть до точки $x = 0$.

В настоящей работе предполагается, что в уравнении (1) функция $h(x)$ непрерывна на отрезке [0,1] или имеет непрерывные производные до определенного порядка на этом отрезке. Устанавливаются простейшие условия, необходимые и достаточные для существования решений уравнения (1) в соответствующих функциональных пространствах с «весом».

## 1 Пространства с «весом» $C_r^n\left([0,1];\mathbb{R}^1\right)$

Введем пространство $\bar{C}\left((0,1];\mathbb{R}^1\right)$ функций, принадлежащих $C\left((0,1];\mathbb{R}^1\right)$, каждую из которых можно продолжить на отрезок [0, 1] до функции класса $C\left([0,1];\mathbb{R}^1\right)$.

Пусть $n$ – натуральное число, $n \ge r$. Введем пространство с «весом»

$$C_r^n\left([0,1];\mathbb{R}^1\right) = \left\{ z(x) \in C^{n-r}\left([0,1];\mathbb{R}^1\right) : x^k z^{(n+k-r)}(x) \in \bar{C}\left((0,1];\mathbb{R}^1\right), \quad k = 1, 2, ..., r \right\}.$$

Для любого неотрицательного целого числа $s$ по определению полагаем

$$C_0^s\left([0,1];\mathbb{R}^1\right) = C^s\left([0,1];\mathbb{R}^1\right).$$

## 2 Переход к системе уравнений

Введем новые неизвестные функции

$$u_i(x) = x^{r-i} y^{(r-i)}(x), \qquad i = 1, 2, \quad \ldots, r-1, \tag{2}$$
$$u_r(x) = y(x)$$

и сведем уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений

$$x\frac{du}{dx} + Bu = F(x), \tag{3}$$

где

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_r(x) \end{pmatrix}, \qquad F(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{r-1}+1-r & a_{r-2} & a_{r-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & 2-r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему дифференциальных уравнений (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, в котором $x \in [0, 1]$, $F(x)$ – функция со значениями в пространстве $\mathbb{R}^r$, $B$ – линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}^r$.

3 Теоремы о гладких решениях уравнения (1)

Спектр оператора $B$ будем обозначать $\sigma(B)$.

Из теоремы 2 в [1] вытекает

Теорема 1. Пусть $\sigma(B) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, в дифференциальном уравнении (1) функция $h(x)$ принадлежит $C^n([0,1];\mathbb{R}^1)$, где $n$ – неотрицательное целое число. Тогда существует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C_{r-1}^{r-1}([0,1];\mathbb{R}^1)$, и это решение принадлежит также

$C_r^{r+n}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$.

Перейдем к исследованию случая, когда спектр оператора $B$ может иметь точки в замкнутой левой полуплоскости комплексной плоскости. Пусть $I$ – тождественный оператор в $\mathbb{R}^r$.

Из теоремы 4 в [1] вытекает

Теорема 2. Пусть $m$ – наименьшее из натуральных чисел $k$ таких, что $\sigma(B)\subset\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>-k\}$, в дифференциальном уравнении (1) $h\left(x\right)\in C^n\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$, где $n$ – натуральное число, $n\geq m$. Если система уравнений

$$\begin{cases} B\varphi_i=F\left(0\right), & (4)\\ (B+iI)\varphi_i=F^{(i)}(+0),\quad i=1,2,\ldots,m-1\qquad (\text{при } m>1) & (5)\end{cases}$$

разрешима относительно элементов $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^r$, то каждому решению $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}$ этой системы уравнений соответствует единственное решение $y\left(x\right)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C_{r-1}^{r+m-1}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$ и такое, что соответствующее ему по формулам (2) решение $u\left(x\right)$ дифференциального уравнения (3), продолженное на отрезок [0, 1] до функции класса $C\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$, удовлетворяет условиям

$$u^{(i)}\left(+0\right)=\varphi_i,\quad i=0,1,\ldots,m-1;$$

это решение $y\left(x\right)$ принадлежит также $C_r^{r+n}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$. Если система уравнений (4), (5) неразрешима относительно элементов $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^r$, то дифференциальное уравнение (1) не имеет решения, принадлежащего $C_{r-1}^{r+m-1}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$.

## Случай $r=1$

Из теоремы 2 при $r=1$ вытекает

Теорема 3. Пусть $m$ – наименьшее из натуральных чисел $k$ таких, что $\operatorname{Re}a_0>-k$, в дифференциальном уравнении (1) $r=1$, $h\left(x\right)\in C^n\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$, где $n$ – натуральное число, $n\geq m$. Если система уравнений

$$\begin{cases} a_0\varphi_0 = h(0), \\ (a_0 + i)\varphi_i = h^{(i)}(+0), \quad i = 1, 2, \ldots, m-1 \qquad (\textit{при } m > 1) \end{cases} \tag{6}$$

разрешима относительно элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^1$, то каждому решению $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ этой системы уравнений соответствует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C^m\left([0,1];\mathbb{R}^1\right)$ и удовлетворяющее условиям

$$y^{(i)}(+0) = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1;$$

это решение $y(x)$ принадлежит также $C_1^{1+n}\left([0,1];\mathbb{R}^1\right)$. Если система уравнений (6) неразрешима относительно элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^1$, то дифференциальное уравнение (1) не имеет решения, принадлежащего $C^m\left([0,1];\mathbb{R}^1\right)$.

Случай $r > 1$

Пусть $r > 1$, в системе уравнений (4), (5)

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \\ \vdots \\ \varphi_{i,r} \end{pmatrix}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Тогда равенство (4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{r-1} + 1 - r & a_{r-2} & a_{r-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & 2-r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{0,1} \\ \varphi_{0,2} \\ \varphi_{0,3} \\ \vdots \\ \varphi_{0,r-1} \\ \varphi_{0,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и выполняется тогда и только тогда, когда

$$\varphi_{0,1} = \varphi_{0,2} = \ldots = \varphi_{0,r-2} = \varphi_{0,r-1} = 0,\ \ a_0\varphi_{0,r} = h(0). \qquad (7)$$

Равенства (5) при $m > 1$ принимают вид

$$\begin{pmatrix} a_{r-1} + i + 1 - r & a_{r-2} & a_{r-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & i + 2 - r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i + 3 - r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \\ \varphi_{i,3} \\ \vdots \\ \varphi_{i,r-1} \\ \varphi_{i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{(i)}(+0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1$, и выполняются тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} \varphi_{i,1} = i(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-(r-2))\varphi_{i,r}, \\ \varphi_{i,2} = i(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-(r-3))\varphi_{i,r}, \\ \vdots \\ \varphi_{i,r-3} = i(i-1)(i-2)\varphi_{i,r}, \\ \varphi_{i,r-2} = i(i-1)\varphi_{i,r}, \\ \varphi_{i,r-1} = i\varphi_{i,r}, \\ (i(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-(r-2))(a_{r-1} + i + 1 - r) + i(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-(r-3))a_{r-2} + \\ + i(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-(r-4))a_{r-3} + \ldots + ia_1 + a_0)\varphi_{i,r} = h^{(i)}(+0), \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \end{gathered} \qquad (8)$$

Отсюда вытекает

Лемма 1. При $r > 1$ система уравнений (4), (5) разрешима относительно элементов

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \\ \vdots \\ \varphi_{i,r} \end{pmatrix}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

пространства $\mathbb{R}^r$ в том и только в том случае, если система уравнений

$$\begin{cases} a_0\varphi_{0,r} = h(0), \\ ((\prod_{j=0}^{r-2}(i-j))(a_{r-1}+i+1-r)+\sum_{k=0}^{r-2}(\prod_{j=0}^{k-1}(i-j))a_k)\varphi_{i,r} = \\ = h^{(i)}(+0), \quad i=1,2,\ldots,m-1 \quad (\textit{при } m>1) \end{cases}$$

разрешима относительно элементов $\varphi_{i,r}, \quad i=0,1,\ldots,m-1,$ пространства $\mathbb{R}^1$.

В случае разрешимости этих систем уравнений соответствие между решениями последней системы уравнений и системы уравнений (4, 5), устанавливаемое посредством равенств (7, 8), является взаимно однозначным. Если правые части всех уравнений этих систем уравнений равны нулю, то данное соответствие является линейным.

В лемме 1 и далее считаем, что $\prod_{j=0}^{-1}(i-j)=1.$

Из [2, теорема 3], теоремы 2 и леммы 1 вытекает

Теорема 4. Пусть $m$ – наименьшее из натуральных чисел $k$ таких, что $\sigma(B)\subset\{\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda>-k\}$, в дифференциальном уравнении (1) $r>1$, $h(x)\in C^n([0,1];\mathbb{R}^1)$, где $n$ – натуральное число, $n\ge m$. Если система уравнений

$$\begin{cases} a_0\psi_0 = h(0), \\ ((\prod_{j=0}^{r-2}(i-j))(a_{r-1}+i+1-r)+\sum_{k=0}^{r-2}(\prod_{j=0}^{k-1}(i-j))a_k)\psi_i = \\ = h^{(i)}(+0), \quad i=1,2,\ldots,m-1 \quad (\textit{при } m>1) \end{cases} \tag{9}$$

разрешима относительно элементов $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^1$, то каждому решению $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}$ этой системы уравнений соответствует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C_{r-1}^{r+m-1}([0,1];\mathbb{R}^1)$ и удовлетворяющее условиям

$$y^{(i)}(+0)=\psi_i, \quad i=0,1,\ldots,m-1; \tag{10}$$

это решение $y(x)$ принадлежит также $C_r^{r+n}([0,1];\mathbb{R}^1)$. Если система уравнений (9) неразрешима относительно элементов $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^1$, то дифференциальное уравнение (1) не имеет решения, принадлежащего $C_{r-1}^{r+m-1}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$.

Придадим уравнению (1) при $h\left(x\right)\equiv 0$ номер (11), однородной системе уравнений, соответствующей системе уравнений (9), номер (12).

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы 4 для дифференциального уравнения (11), то из замечания 6 в [1] и леммы 1 вытекает, что установленное этой теоремой соответствие между решениями системы уравнений (12) и решениями класса $C_r^{r+n}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$ уравнения (11) является взаимно однозначным и линейным, поэтому линейно независимым решениям системы уравнений (12) отвечают линейно независимые решения класса $C_r^{r+n}\left(\left[0,1\right];\mathbb{R}^1\right)$ уравнения (11).

## Библиографический список

1 Зюкин, П. Н. О гладких решениях линейного вырождающегося дифференциального уравнения *l*-го порядка [Текст] / П. Н. Зюкин // Воронеж. гос. лесотехн. акад. – Воронеж, 2005. – 15 с. – Деп. В ВИНИТИ 29.11.05, № 1562 – В 2005.

2 Зюкин, П. Н. О гладких решениях линейного вырождающегося дифференциального уравнения [Текст] / П. Н. Зюкин // Математические модели и операторные уравнения: сб. научн. тр. / ВорГУ. – Воронеж, 2003. – Т. 2. – С. 68-74.