УДК 517.982.22

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ТЕНЕЛЛИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. М. Спирина, Е. О. Уточкина (ВГЛТА)

1 Постановка задачи

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt}+Ax=f(t,x) \qquad (0\le t\le 1), \tag{1}$$

$$x(0)=x. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ – искомая функция, определенная на $[0,1]$ со значениями в E, $f(t,x)$, при каждом $t\in[0,1]$ – действующий в E нелинейных оператор, A – действующий в E линейный оператор с областью определения $D(A)$, x_0 – элемент из $D(A)$. Функцию $x(t)$ назовем решением задачи (1)-(2), если она имеет непрерывную производную $\frac{dx}{dt}$ на отрезке $[0,1]$, $x(t)$, $Ax(t)$ тоже непрерывны на этом отрезке и $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

В дальнейшем будем предполагать, что A – сильно позитивный оператор, т. е. порождающий аналитическую подгруппу $T(t)$. Относительно функции $f(t,x)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию

$$\begin{gathered}\|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)\|\le c(R)(|t_1-t_2|^{\delta}+\|x_1-x_2\|)\\ (0\le t_1,t_2\le 1,\|x_1\|,\|x_2\|\le R, 0\le\delta<1).\end{gathered} \tag{3}$$

Как известно из [1], эти условия обеспечивают существование единственного решения задачи (1)-(2) на некотором отрезке $[0,t]<[0,1]$, причем это решение $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s,x(s))ds. \tag{4}$$

Приближенное решение $x_n(t)$ задачи (1)-(2) будем искать методом Тонелли, который состоит в следующем.

По натуральному $n=1,2,...$ и $h=1/n$ определим $x_n(t)$ как решение задачи

$$\frac{dx_n(t)}{dt}+Ax_n(t)=f(t,x_n(t-h)) \qquad (0\le t\le 1), \tag{5}$$

$$x_n(t)=x_0 \qquad (-h\le t\le 0). \tag{6}$$

Функция $x_n(t)$ называется решением задачи (5)-(6), если на отрезке $[0,1]$ существует непрерывная производная $\frac{dx_n(t)}{dt}$, $x_n(t)$ и $Ax_n(t)$ непрерывны на этом отрезке, $x_n(t)$ удовлетворяет (5) и (6).

Решение $x_n(t)$ находится последовательно на отрезке $[0,h]$, $[h,2h]$... из равенства

$$x_n(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s,x_n(s-h))ds.$$

Поэтому, в отличие от задачи (1)-(2), разрешимой вообще говоря, локально, задача (5)-(6) имеет решение на всем отрезке $[0,1]$.

Далее исследуется сходимость $x_n(t)$ к $x(t)$ и $Ax_n(t)$ к $Ax(t)$ на отрезке $[0,t]$, а затем, в случае, когда $x(t)$ существует на всем отрезке $[0,1]$, доказывается сходимость на всем отрезке $[0,1]$.

2 Сходимость $x_n(t)$ к $x(t)$ на $[0,t]$

Теорема 1. Задача (1)-(2) имеет единственное решение, определенное на отрезке $[0,t]$, и справедлива оценка

$$\|x_n(t)-x(t)\|\le \square\, h \tag{7}$$

где $\square = const$.

Доказательство. Локальное существование решения и его единственность доказаны в [1]. Доказательство оценки (7) опирается на две леммы.

Лемма 1. На отрезке $[0,t]$ решение $x_n(t)$ лежит в шаре ограниченного радиуса, т. е. $\|x_n(t)\|\le R$.

Лемма 2. Производная $x_n^{'}(t)$ ограничена на каждом ограниченном в E множестве, т. е.

$$\left\|x_n^{'}(t)\right\| \le P(R) \qquad (0 \le t \le 1, \quad \left\|x_n(t)\right\| \le R).$$

Пользуясь этими леммами и условием (3), получаем:

$$\left\|x(t)-x_n(t)\right\| \le Wc(R)\int_0^t \left\|x_n(s)-x_n(s-h)\right\| ds +$$

$$+Wc(R)\int_0^t \left\|x(s)-x_n(s)\right\| ds \le Wc(R)P(R)h + Wc(R)\int_o^t \left\|x_n(s)-x(s)ds\right\|$$

Применяя интегральное неравенство, получим:

$$\left\|x_n(t)-x(t)\right\| \le \square\, h$$

где $\square = W_c(R)P(R)e^{W_c(R)}$.

Теорема доказана.

3 Сходимость $A^{\alpha}x_n(t)$ и $A^{\alpha}x(t)$ при $0<\alpha<1$ на $[0,t]$

Заметим, что A – сильно позитивный оператор, поэтому при любых действительных α можно определить его дробные степени A.

Из [1] известно, что отрицательные дробные степени оператора A ограничены. Поэтому из сходимости $A^{\alpha}x_n(t)$ и $A^{\alpha}x(t)$ следовала бы сходимость $x_n(t)$ и $x(t)$, т. е. в этом пункте доказывается более сложное утверждение, чем с теоремой 1.

Теорема 2. На отрезке $[0,t]$ верна оценка

$$\left\|A^{\alpha}x_n(t)-A^{\alpha}x(t)\right\| \le \square(\alpha)h \tag{8}$$

где $\square(\alpha)h = const, 0<\alpha<1$.

Доказательство. Оценивая $\left\|A^{\alpha}x_n(t)-A^{\alpha}x(t)\right\|$, получим

$$\left\| A^{\alpha} x_n(t) - A^{\alpha} x(t) \right\| \le c(\alpha, R) \int_0^t \frac{\left\| x(s) - x_n(s) \right\|}{(t-s)^{\alpha}} ds +$$

$$+ c(\alpha, R) P(R) h \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\alpha}}.$$

Применяя теперь теорему 1, получим оценку (8), где

$$\square(\alpha) = c(\alpha, R) \frac{\square + P(R)}{1-\alpha}.$$

Теорема доказана.

Если бы оценку (8) удалось доказать при $\alpha = 1$, то можно было бы утверждать сходимость производной приближенного решения к производной точного решения. Исследованию этого вопроса посвящен следующий пункт.

4 Сходимость $Ax_n(t)$ к $Ax(t)$ на $[0, t^*]$

Условия, при которых доказаны теоремы 1, 2, оказываются недостаточными для установления оценки (8) при $\alpha = 1$. Поэтому на оператор $f(t, x)$ накладываются дополнительные ограничения.

Будем полагать, что существует производная Фреше $f_x{}'(t, x)$, и эта производная удовлетворяет условию

$$\begin{gathered} \| f_x{}'(t_1, x_1) - f_x{}'(t_2, x_1) \|_{Z(E)} \le C(R) \left(|t_1 - t_2|^{\delta} + \|x_1 - x_2\|_E^{\rho} \right) \\ \left(\|x_1\|_E, \ \|x_2\|_E \le R, \ \delta, \rho \ \in (0,1) \right). \end{gathered} \tag{9}$$

При этих дополнительных ограничениях сформулируем два вспомогательных утверждения, необходимых при доказательстве оценки (8) при $\alpha = 1$.

Лемма 3. Справедливо равенство

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = K(t_1, x_1, x_2)(x_1 - x_2),$$

где

$$K(t, x_1, x_2) = \int_0^1 f_x{}'(t, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) d\lambda,$$

и оценка

$$\left\|K(t_1,x_1,y_1)-K(t_2,x_2,y_2)\right\|_{Z(E)}\le C(R)\left(\left|t_1-t_2\right|^{\delta}+\left\|x_1-x_2\right\|_E^{\rho}+\left\|y_1-y_2\right\|_E^{\rho}\right)$$
$$\left(0\le t_1,t_2\le 1,\ \left\|x_1\right\|_E,\ \left\|x_2\right\|_E,\ \left\|y_1\right\|_E,\ \left\|y_2\right\|_E\ \le R\right).$$

Введем обозначение: $\varphi_h(t)=x(t)-x_n(t-h)$.

Лемма 4. Справедливо неравенство

$$\left\|\varphi_h(t+h+\Delta t)-\varphi_h(t+h)\right\|\le\frac{Qh}{(t+h)^{\alpha}},\ \text{где}\ 0\le\alpha\le 1,\ Q=const.$$

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 3. Пусть оператор *A* сильно позитивен, оператор $f(t,x)$ удовлетворяет условию (3), а оператор $f_x{}'(t,x)$ существует и удовлетворяет условию (9).

Тогда на отрезке $[0,t^*]$ верна оценка

$$\left\|Ax_n(t)-ax(t)\right\|\le M\cdot h,\ \text{где}\ \ M=const.$$

Доказательство. Для краткости введем обозначение:

$$K\left(t,x_n(t-h),x(t)\right)=K(t).$$

Тогда можно записать

$$Ax_n(t)-Ax(t)=\int_0^t AT(t-s)K(s)\left(\varphi_n(s)-\varphi_n(t)\right)ds+$$
$$+\int_0^t AT(t-s)\left(K(s)-K(t)\right)\varphi_n(t)ds+\left(1-T(t)\right)K(t)\varphi_n(t)=J_1+J_2+J_3.$$

Оценим по норме каждое слагаемое.

Очевидно, $\left\|J_2\right\|\le N_2h$, $\left\|J_3\right\|\le N_3h$, где N_2, N_3 – постоянные.

J_1 рассмотрим в трех случаях:

1) $0<t\le h$, 2) $h<t\le 2h$, 3) $t>2h$.

В случае 1) и 3) нетрудно показать, что $\left\|J_1\right\|\le N_1h$.

Для получения аналогичной оценки в случае 2) воспользуемся леммой 4.

Получим

$$\left\| J_1 \right\| \le Qh \int_h^1 \frac{ds}{(t-s)^\alpha s^{1-\alpha}} \le \tilde{Q}h .$$

Далее выберем $M = \max\left(N_1, N_2, N_3, \tilde{Q}\right)$.

Теорема доказана.

5 Сходимость $A^\alpha x_n(t)$ к $A^\alpha x(t)$ при $0 \le \alpha \le 1$ на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Пусть R – некоторая константа. Так как на отрезке $[0, t^*]$ оценка (8) верна, то, фиксируя $h < R/Z$, будем иметь на этом отрезке $\left\| x_n(t) - x(t) \right\| \le R$.

Введем в рассмотрение множество $H = \left\{ \tau :\ 0 \le \mathrm{t} \le \tau \mid \left\| x_n(t) - x(t) \right\| \le R \right\}$. Заметим, что H – и ограничено, поэтому существует $\bar{\tau}(h)$ верхняя граница этого множества и $\bar{\tau}(h) \in H$.

Далее можно показать, что $\bar{\tau}(h) = 1$, если приближенные решения $x_n(t)$ строить по $h < R/N$, где N – достаточно велико, т. е. строя приближенные решения по достаточно малому h получим, что $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ на всем отрезке $[0,1]$.

Теперь, рассматривая $A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)$ при $0 < \alpha < 1$ получим на всем отрезке $[0,1]$ оценку (8).

При $\alpha = 1$ оценка (8) доказывается так же, как и теорема 3, при тех же ограничениях на $f(t, x)$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1 Красносельский, М. А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций [Текст] : учеб. пособие / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустильник, П. Е. Соболевский // М. : Наука, 1976. – 499 с.

2 Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И. Г. Петровскиий // М. : Наука, 1980. – 196 с.

3 Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман // М. : Мир, 1970. – 720 с.