УДК 517.929.7

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ОБОБЩЕННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

С. С. Веневитина, И. В. Сапронов, Е. О. Уточкина (ВГЛТА)

Линеаризованные уравнения движения однородной упругой среды имеют вид [2]:

$$\rho\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=\mu\Delta\bar{u}+(\lambda+\mu)grad\,div\bar{u}+\bar{f}(t,x),$$

где $\bar{u}$ – вектор перемещений, $\bar{f}(t,x)$ – поле объемных сил, λ и μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность среды.

Для стационарной задачи, выше написанные уравнения, переходят в следующие:

$$-\mu\Delta\bar{u}-(\lambda+\mu)grad\,div\bar{u}=\bar{f}.$$

Введем в рассмотрение гильбертову пару $\left(\bar{H}^1_{0,S}(\Omega);\bar{L}^2(\Omega)\right)$, где $\bar{H}^1_{0,S}(\Omega)$ – подпространство пространства $\bar{H}^1(\Omega)$, состоящее из всех функций из $\bar{H}^1(\Omega)$, аннулирующихся на части S границы $\partial\Omega$ с $mesS>0$. Обозначим через Γ дополнение в $\partial\Omega$ к множеству $\bar{S}$.

Найдем порождающий оператор этой пары из тождества

$$(\bar{u},A\bar{v})_{\bar{L}^2(\Omega)}=(\bar{u},\bar{v})_{\bar{H}^1_{0,S}(\Omega)},$$

для всех $\bar{u}\in\bar{H}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\bar{v}\in D(A)$.

В силу формул для скалярного произведения в пространствах $\bar{L}^2(\Omega)$ и $\bar{H}^1_{0,S}(\Omega)$ это тождество примет вид:

$$\int_\Omega(\bar{u},A\bar{v})d\Omega=\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\alpha\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\beta div\bar{v}\,div\bar{u}\right\}d\Omega.$$

При достаточно гладких полях $\bar{u}$ и $\bar{v}$ можно к правой части этого равенства применить формулу Бетти, в результате чего получим:

$$\int_{\Omega}(\bar{u},A\bar{v})d\Omega=-\int_{\Omega}(\bar{u},\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)grad\,div\bar{v})d\Omega+$$

$$+\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\alpha_j\right)u_j d\sigma. \quad (1)$$

Выберем $\bar{u}\in\bar{H}^1_{0,S}(\Omega)$ финитным, тогда

$$\int_{\Omega}(\bar{u},A\bar{v})d\Omega=-\int_{\Omega}(\bar{u},\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)grad\,div\bar{v})d\Omega,$$

или
$$\int_{\Omega}(\bar{u},A\bar{v}+\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)grad\,div\bar{v})d\Omega=0.$$

Следовательно, $A\bar{v}+\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)grad\,div\bar{v}=0.$

Тогда формула (1) примет вид:

$$\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\alpha_j\right)u_j d\sigma=0.$$

Пусть ψ_1 – финитная функция на S. Положим $u_1=\psi_1$ на Γ, $u_1=0$ на S и $u_2=u_3\equiv 0$ на $\partial\Omega$. Поле $\bar{u}=(u_1;u_2;u_3)$ определенное на границе $\partial\Omega$ продолжим до гладкого поля в области Ω. Для этого поля справедливо равенство

$$\int_{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\alpha_1\right)\psi_1 d\sigma=0.$$

В силу произвольности финитной функции ψ_1 отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\alpha_1=0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Аналогично рассуждая, получим равенства

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\,\alpha_j=0 \quad \text{на} \quad \Gamma \quad (j=2,3).$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема. Для любой функции $\bar{f}\in\bar{L}^2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи

$$-\mu\Delta\bar{u}-(\lambda+\mu)grad\,div\bar{u}=\bar{f} \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\,\alpha_j=0 \quad \text{на} \quad \Gamma \quad (j=1,2,3),$$

$$\bar{v}=0 \quad \text{на} \quad S,$$

то есть задачи о перемещениях упругой среды, жестко закрепленной на части S границы $\partial\Omega$, свободной от обобщенных напряжений на части Γ, под действием объемных сил $\bar{f}$. Для слабых решений поле $\bar{f}$ должно принадлежать пространству сопряженному к пространству $\bar{H}^1_{0,S}(\Omega)$.

В частном случае при $\alpha=\mu$ и $\beta=\lambda$, получается теорема существования и единственности обобщенных и слабых решений для обычной теории упругости:

$$-\mu\Delta\bar{u}-(\lambda+\mu)grad\,div\bar{u}=\bar{f} \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\mu\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\lambda div\bar{v}\,\alpha_j=0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$\bar{v}=0 \quad \text{на} \quad S.$$

Библиографический список

1 Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи [Текст] / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан // М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

2 Новацкий, В. Теория упругости [Текст] / В. Новацкий // М. : Мир, 1975.