УДК 517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. В. Сапронов, Н. М. Спирина, Е. О. Уточкина (ВГЛТА)

Рассматривается следующая краевая задача

$$-\Delta U-\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\left|U_{X_2}\right|U_{X_2}\right)+U=f \qquad (x\in\mathbb{R}_2^+), \tag{1}$$

$$U(x_1,0)=0. \tag{2}$$

Ее решением будем называть функцию *u*, имеющую обобщенные производные до второго порядка включительно; функции $U, U_{x_i}, U_{x_i x_k}, U_{x_2}\cdot U_{x_2 x_2} (i=1,2; k=1,2)$ принадлежат $L_2(R_2^+)$ и почти всюду удовлетворяют уравнению (1).

Задача (1) – (2) возникает при качественном исследовании математической модели турбулентного движения жидкости [1].

Левая часть уравнения (1) представляет собой монотонный оператор. Уравнения с монотонными операторами изучались многими математиками [2]. Особенностью задачи (1) – (2) по сравнению с другими аналогичными задачами, является то, что рассмотренные там уравнения содержат изотропные монотонные операторы. Кроме того, в них изучаются лишь обобщенные решения, которые удовлетворяют некоторым интегральным тождествам и имеют только первые производные на $L_2(R_2^+)$.

Теорема. Если $f\in L_2(R_2^+)$, то задача (1) – (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Наряду с задачей (1) – (2) рассмотрим задачу

$$-\Delta U^\eta-\frac{\partial}{\partial X_2}\frac{\left|U_{X_2}^\eta\right|U_{X_2}^\eta}{1+\eta\left|U_{X_2}^\eta\right|}+U=f \;\; (x\in\mathbb{R}_2^+), \tag{3}$$

$$U^\eta(x_1,0)=0, \eta\in(0,1). \tag{4}$$

Решением задачи (3) – (4) будем называть функцию $U^\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_2^+)$, если она почти всюду удовлетворяет уравнению (3). При любом фиксированном $\eta\in(0,1)$ задача (3) – (4) является задачей с ограниченной нелинейностью и для нее существует единственное решение $U^{\eta} \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_2^+)$ [3].

Лемма. Если U^{η} – решение задачи (3) – (4), то справедлива оценка

$$\left\|U^{\eta}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} \le M \| f \|_{L_2}, \tag{5}$$

где М не зависит от f, η.

Действительно, умножим уравнение (3) скалярно на U^{η}, проинтегрировав по частям первые два члена слева, и применив к правой части полученного интегрального тождества неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{k=1}^{2}\left\|U_{X_k}^{\eta}\right\|_{L_2}^2 + \int_{R^+}\frac{\left|U_{X_2}^{\eta}\right|U_{X_2}^{\eta}}{1+\eta\left|U_{X_2}^{\eta}\right|}dx + \left\|U^{\eta}\right\|_{L_2} \le \left\|U^{\eta}\right\|_{L_2}\| f \|_{L_2}$$

откуда следует оценка $\left\|U^{\eta}\right\|_{W_2^1} \le M \| f \|_{L_2}$, где M не зависит от η и f.

Умножив уравнение (3) скалярно на $U_{x_1x_1}$ и проинтегрировав первые два члена слева два раза по частям и третий член слева – один раз, применив к правой части неравенство Коши с ε, получим

$$\left\|U_{X_1X_1}^{\eta}\right\|_{L_2}^2 + \left\|U_{X_1X_1}^{\eta}\right\|_{L_2}^2 + \int_{R^+}(U_{X_1X_1}^{\eta})^2\frac{2\left|U_{X_2}^{\eta}\right| + \eta\left|U_{X_2}^{\eta}\right|^2}{\left[1+\eta\left|U_{X_2}^{\eta}\right|\right]^2}dx + \left\|U_{X_1}^{\eta}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2\varepsilon}\| f \|_{L_2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left\|U_{X_2X_2}^{\eta}\right\|_{L_2}^2.$$

Выбирая $\varepsilon < 2$, получим оценку $\left\|U_{x_1x_i}^{\eta}\right\|_{L_2}^2 \le M \| f \|_{L_2}^2 \ (i=1,2), M$ не зависит от η и f. Непосредственно из уравнения (3) следует, что

$$-U_{X_2X_2}^{\eta}\left[1+\frac{2\left|U_{X_2}^{\eta}\right| + \eta\left|U_{X_2}^{\eta}\right|^2}{(1+\eta\left|U_{X_2}^{\eta}\right|)^2}\right] = f - U^{\eta} + U_{X_1X_1}^{\eta},$$

Откуда получаем оценку $\left\|U_{x_2x_2}^{\eta}\right\|_{L} \le M \| f \|_{L_2}^2$, где M не зависит от η и f. Лемма доказана.

Так как выполняется оценка (5), то при $\eta \to 0, U^{\eta} \to U^0$ слабо и пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_2^+)$ и $\left\|U^0\right\|_{W_2^2} \le M \| f \|_{L_2}$, где M не зависит от η и f. Второй член слева в уравнении (3) можно записать следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial X_2}\frac{\left|U^{\eta}_{X_2}\right|U^{\eta}_{X_2}}{1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|}=U^{\eta}_{X_2X_2}\ \frac{2U^{\eta}_{X_2}+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2}{(1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|)^2}.$$

Покажем, что $\frac{2\left|U^{\eta}_{x_2}\right|+\eta\left|U^{\eta}_{x_2}\right|^2}{(1+\eta\left|U^{\eta}_{x_2}\right|)^2}$ сходится к $2\left|U^{0}_{x_2}\right|$ сильно в пространстве $L_2(R_2^+)$.

$$\int\limits_{R^+}\left[\frac{2\left|U^{\eta}_{X_2}\right|+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2}{\left[1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|\right]^2}-2\left|\overset{\circ}{U}_{X_2}\right|\right]dx=\int\limits_{R^+}\left[2(\left|U^{\eta}_{X_2}\right|-\left|\overset{\circ}{U}{}^{\eta}_{X_2}\right|)+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2-2\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\overset{\circ}{U}{}^{\eta}_{X_2}\right|(1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|)-\right.$$

$$-2\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\overset{\circ}{U}{}^{\eta}_{X_2}\right|^2\cdot\frac{1}{(1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|)^4}\,dx\le M\left\|U^{\eta}_{X_2}-\overset{\circ}{U}{}^{\eta}_{X_2}\right\|^2_{L_2}+$$

$$+\eta^2\left\|U^{\eta}_{X_2}\right\|^4_{L_4}+\eta^2\left\|U^{\eta}_{X_2}\right\|^2_{L_4}\left\|\overset{\circ}{U}{}^{\eta}_{X_2}\right\|^2_{L_4}\le M\left\|U^{\eta}_{X_2}-\overset{\circ}{U}{}^{\eta}_{X_2}\right\|_{W_2^1}+$$

$$\left.+\eta^2\left\|U^{\eta}\right\|^2_{W_2^1}\left\|U^{\eta}\right\|^2_{W_2^2}+\eta^2\left\|U^{\eta}\right\|^2_{W_2^1}\left\|U^{\eta}\right\|^2_{W_2^2}\left\|\overset{\circ}{U}\right\|_{W_2^1}\left\|\overset{\circ}{U}\right\|_{W_2^2}\right]\to 0$$

Если U^{η} – решение задачи (3) – (4), то $\forall\varphi\in C^0(R_2^+)$ справедливо интегральное тождество

$$-(\Delta U^{\eta},\varphi)-\left(U^{\eta}_{X_2X_2}\ \frac{2U^{\eta}_{X_2}+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2}{(1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|)^2},\varphi\right)+(U^{\eta},\varphi)=(f,\varphi). \qquad (7)$$

Используя (6), покажем, что

$$\left|U^{\eta}_{X_2X_2}\ \frac{2U^{\eta}_{X_2}+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2}{(1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|)^2}-2U^{0}_{X_2X_2}\left|U^{0}_{X_2}\right|,\varphi\right|=\left|\frac{2U^{\eta}_{X_2}+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2}{(1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|)^2}-2\left|U^{0}_{X_2}\right|,U^{\eta}_{X_2X_2}\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(2\left|U^{0}_{X_2}\right|\varphi,U^{\eta}_{X_2X_2}-U^{0}_{X_2X_2}\right)\right|\le M\left\|\frac{2\left|U^{\eta}_{X_2}\right|+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|^2}{\left[1+\eta\left|U^{\eta}_{X_2}\right|\right]^2}\cdot 2\left|\overset{\circ}{U}_{X_2}\right|\right\|_{L_2}.$$

$$\cdot \left\| U^{\eta}_{X_2 X_2} \right\|_{L_2} + M \left| \left(U_{X_2,} U^0_{X_2 X_2} - U^0_{X_2 X_2} \right) \right| \to 0 \text{ при } \eta \to 0 .$$

Переходя к пределу в тождестве (7) при $\eta \to 0$, получим тождество

$$-(\Delta U^{\eta}, \varphi) - \left(\frac{\partial}{\partial X_2} \left[\left| U^0_{X_2} \right| U^0_{X_2} \right], \varphi \right) + (U^0, \varphi) = (f, \varphi).$$

откуда следует, что U^0 есть решение задачи (1) – (2). Единственность решения легко доказывается, так как левая часть уравнения (1) представляет собой монотонный оператор. Теорема доказана.

Библиографический список

1 Лойционский, Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1976. – 736 с.

2 Лионс, Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М. : Мир, 1972, – 587 с.

3 Скрыпник, И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев : Наукова думка, 1973. – 220 с.