УДК 517.968

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. В. Сапронов, П. Н. Зюкин, В. В. Зенина (ВГЛТА)

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на немалое число публикаций, посвященных изучению уравнений Вольтерра, данная тематика остается актуальной и представляет известный интерес. Существенное развитие эта теория получила в серии работ [1-3], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и II рода, скалярные решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида. В последние годы исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в бесконечномерных банаховых пространствах [4-9]. В работах [10, 11] изучалось интегральное уравнение Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в пространстве суммируемых на $[0,\delta]$ функций со значениями в банаховом пространстве E. Данная статья является продолжением этих работ.

1 Постановка задачи. Формулировка основного результата

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_E .$$

В пространстве $Q([0,\delta],E)$ ограниченных измеримых в норме E на $[0,\delta]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{Q([0,\delta],E)} = \sup_{0\le x\le\delta} \|\psi(x)\|_E .$$

Введем семейство банаховых пространств $M_{q,\gamma}^{k,\alpha}$, $q \ge 1$:

$$M_{q,\gamma}^{k,\alpha}=\left\{\varphi(x):\varphi^{(i)}(x)=x^{\gamma-qi}e^{\gamma\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\omega_i(x),\omega_i(x)\in Q([0,\delta],E);\|\varphi\|_{M_{q,\gamma}^{k,\alpha}}=\max_{0\le i\le k}\|\omega_i\|_{Q([0,\delta],E)}\right\}.$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt=f(x),\ (0\le x\le\delta) \tag{1}$$

в $M_{2,\nu}^{0,-6}$, где $K(x,t)$ – заданная функция со значениями в $L(E)$, имеющая вид

$$K(x,t)=\sum_{\alpha+\beta=2}^{p}K^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta . \tag{2}$$

Операторы $K^{\alpha\beta}$ являются ограниченными в E.

Предположим, что для всех $k=0,1,2$ существуют конечные пределы

$$C_k=\lim_{x\to 0}(-1)^k K_{t^k}(x,x)x^{-(2-k)2},\ (k=0,1,2). \tag{3}$$

Пусть

$$K(x,t)=A(x,t)+B(x,t),\text{ где}$$

$$A(x,t)=\left[\frac{1}{2}C_2x^2-C_2xt+\frac{1}{2}C_2t^2\right]+\left[C_1x^3-C_1x^2t\right]+\left[3C_0x^4-2C_0x^3t\right]. \tag{4}$$

Тогда $B(x,t)=K(x,t)-A(x,t)$.

Из (3) и (4) следует, что

$$B(x,t)=\sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p}K^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta+(x-t)\sum_{\alpha+\beta=3}\bar{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta+(x-t)^2\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta ,$$

где $\bar{K}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{K}^{\alpha\beta}$ – ограниченные операторы в E.

Лемма 1. Уравнение (1) с интегральным оператором K порядка 2, удовлетворяющим условию (3), имеет решение $u(x)\in M_{2,\nu}^{0,-6}$ $(\nu<0)$ тогда и только тогда, когда интегральное уравнение

$$A_1u+B_1u=f(x) \tag{5}$$

имеет решение $u(x)\in M_{2,\nu}^{0,-6}$, где

$$A_1 u=\int_0^x A(x,t)u(t)dt\,,$$

$$B_1 u=\int_0^x B(x,t)u(t)dt\,.$$

Доказательство очевидное.

Введем в рассмотрение операторный пучок

$$B_\nu=C_0-\frac{1}{\nu}C_1+\frac{1}{\nu^2}C_2\,. \tag{6}$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1 пучок (6) имеет характеристическое число ν $(\nu<0)$;

2 характеристическому числу ν соответствует собственный вектор e без присоединенных к нему векторов;

3 оператор C_0 имеет ограниченный обратный.

Тогда для уравнения (1) существует решение

$$u(x)=\upsilon(x)+\bar{w}(x)+\bar{u}(x)\,,$$

где $\upsilon(x)$, $\bar{w}(x)$, $\bar{u}(x)$ – искомые функции в пространстве $M_{2,\nu}^{0,-6}$, которые будут определены ниже.

2 Построение решения

Лемма 2. Пусть ν $(\nu<0)$ является характеристическим числом операторного пучка (6). Тогда:

1 операторы A_1 и B_1 действуют из $M_{2,\nu}^{0,-6}$ в $M_{2,\nu}^{1,0}$;

2 для любого $\varepsilon_0>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$\|B_1\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}}\le\varepsilon_0 \text{ при } 0\le x\le\delta\,.$$

Доказательство. Оператор $B_1=B_1^1+B_1^2+B_1^3$, где $\left(B_1^1u\right)(x)=\int_0^x\sum_{\alpha+\beta\ge5}^{p}K^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta$.

Покажем, что $\|B_1^1\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}}<\frac{\varepsilon_0}{3}$, ε_0 – сколь угодно малое число при достаточно малом δ.

Пусть

$$\int_0^x \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega(t)dt = e^{\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega_0(x),$$

$$\sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} \frac{1}{x^6} e^{\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega(x) + \int_0^x \sum_{\substack{\alpha+\beta\ge 5\\ \alpha>0}}^{p} K^{\alpha\beta} \alpha x^{\alpha-1} t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega(t)dt = \frac{1}{x^2} e^{\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega_1(x).$$

Тогда

$$\|\omega_0\|_{Q([0,\delta],E)} = \left\| e^{-\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \int_0^x \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega(t)dt \right\|_{Q([0,\delta],E)} =$$

$$= \max_{0\le x\le\delta} \left\| \int_0^1 \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} s^\beta \frac{1}{(xs)^6} e^{\frac{\nu(1-s)}{xs}} x\omega(xs)ds \right\|_E \le \max_{0\le x\le\delta} \int_0^1 \left\| \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta-5} s^\beta \frac{1}{s^6} e^{\frac{\nu(1-s)}{xs}} \omega(xs) \right\|_E ds \le$$

$$\le K_1 \varepsilon \|\omega\|_{Q([0,\delta],E)},$$

где $\max\limits_{0\le x\le\delta} \left\| \sum\limits_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta-5} \right\|_E \le K_1$, $\int\limits_0^1 \frac{1}{s^6} e^{\frac{\nu(1-s)}{xs}} ds < \varepsilon$ по теореме Лебега при достаточно малом δ,

$$\|\omega_1\|_{Q([0,\delta],E)} = \left\| x^2 e^{-\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \left[\sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} \frac{1}{x^6} e^{\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega(x) + \int_0^x \sum_{\substack{\alpha+\beta\ge 5\\ \alpha>0}}^{p} K^{\alpha\beta} \alpha x^{\alpha-1} t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^\delta \frac{dz}{z^2}} \omega(t)dt \right] \right\|_{Q([0,\delta],E)} \le$$

$$\le \left\| \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta-4} \omega(x) \right\|_{Q([0,\delta],E)} + \left\| \int_0^x \sum_{\substack{\alpha+\beta\ge 5\\ \alpha>0}}^{p} K^{\alpha\beta} \alpha x^{\alpha+1} t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^x \frac{dz}{z^2}} \omega(t)dt \right\|_{Q([0,\delta],E)} =$$

$$= \max_{0\le x\le\delta} \left\| \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta-4} \omega(x) \right\|_E + \max_{0\le x\le\delta} \left\| \int_0^x \sum_{\substack{\alpha+\beta\ge 5\\ \alpha>0}}^{p} K^{\alpha\beta} \alpha x^{\alpha+1} t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^x \frac{dz}{z^2}} \omega(t)dt \right\|_E =$$

$$= \max_{0\le x\le\delta} \left\| \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta-4} \omega(x) \right\|_E + \max_{0\le x\le\delta} \left\| \int_0^1 \sum_{\substack{\alpha+\beta\ge 5\\ \alpha>0}}^{p} K^{\alpha\beta} \alpha x^{\alpha+\beta-4} s^\beta \frac{1}{s^6} e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}} \omega(xs)ds \right\|_E \le$$

$$\le \varepsilon_1 K_1 \|\omega\|_{Q([0,\delta],E)} + \varepsilon K_2 \|\omega\|_{Q([0,\delta],E)} = (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon K_2)\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)},$$

где $\max\limits_{0\le x\le\delta}\left\|\sum\limits_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta-4}\right\|_E \le K_2$, ε_1 – сколь угодно малое положительное число при достаточно малом δ.

Следовательно,

$$\left\|\left(B_1^1 u\right)(x)\right\|_{M_{2,\nu}^{1,0}} = \left\|\int_0^x \sum_{\alpha+\beta\ge 5}^{p} K^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta u(t)dt\right\|_{M_{2,\nu}^{1,0}} \le \max\left\{\varepsilon K_1 \|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}, (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon K_2)\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\varepsilon K_1, (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon K_2)\right\}\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}.$$

Значит $\left\|B_1^1\right\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}} \le \max\left\{\varepsilon K_1, (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon K_2)\right\}$.

Выберем δ таким, чтобы $\max\left\{\varepsilon K_1, (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon K_2)\right\} < \frac{\varepsilon_0}{3}$, тогда $\left\|B_1^1\right\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}} < \frac{\varepsilon_0}{3}$.

Покажем, что $\left\|B_1^2\right\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}} < \frac{\varepsilon_0}{3}$, где $\left(B_1^2 u\right)(x) = \int\limits_0^x (x-t)\sum\limits_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta u(t)dt$.

Пусть

$$\int_0^x (x-t)\sum_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta u(t)dt = e^{\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\omega_0(x),$$

$$\int_0^x \left[\sum_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta u(t) + (x-t)\sum_{\substack{\alpha+\beta=3\\ \alpha>0}} \alpha x^{\alpha-1} t^\beta u(t)\right]dt = \frac{1}{x^2} e^{\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\omega_1(x),$$

тогда

$$\|\omega_0\|_{Q([0,\delta],E)} = \left\|e^{-\nu\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\int_0^x (x-t)\sum_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^\delta \frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)} =$$

$$= \max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^x (x-t)\sum_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta \frac{1}{t^6} e^{\nu\int_t^x \frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_E = \max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1 (1-s)\sum_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} s^\beta x^{-1} \frac{1}{s^6} e^{\nu\left(\frac{1-s}{xs}\right)}\omega(xs)ds\right\|_E \le$$

$$\le \max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 \left\|(1-s)\sum_{\alpha+\beta=3} \bar{K}^{\alpha\beta} s^\beta \frac{1}{xs^6} e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}\omega(xs)\right\|_E ds \le M_1\varepsilon_2 \|\omega\|_{Q([0,\delta],E)},$$

где $\left\|\sum_{\alpha+\beta=3}\bar{K}^{\alpha\beta}\right\|_E < M_1$, $\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1(1-s)\frac{1}{xs^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}ds<\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 -$ сколь угодно малое положительное число при достаточно малом δ.

$$\|\omega_1\|_{Q([0,\delta],E)}=\left\|x^2e^{-\nu\int_x^\delta\frac{dz}{z^2}}\int_0^x\left[\sum_{\alpha+\beta=3}\bar{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int_t^\delta\frac{dz}{z^2}}+(x-t)\sum_{\substack{\alpha+\beta=3\\ \alpha>0}}\bar{K}^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha-1}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int_t^\delta\frac{dz}{z^2}}\right]u(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}\le$$

$$\le\left\|\int_0^x\sum_{\alpha+\beta=3}\bar{K}^{\alpha\beta}x^{\alpha+2}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}+\left\|\int_0^x(x-t)\sum_{\substack{\alpha+\beta=3\\ \alpha>0}}\bar{K}^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+1}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}=$$

$$=\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^x\sum_{\alpha+\beta=3}\bar{K}^{\alpha\beta}x^{\alpha+2}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_E+\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^x(x-t)\sum_{\substack{\alpha+\beta=3\\ \alpha>0}}\bar{K}^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+1}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_E=$$

$$=\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1\sum_{\alpha+\beta=3}\bar{K}^{\alpha\beta}s^\beta\frac{1}{s^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}\omega(xs)ds\right\|_E+\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1(1-s)\sum_{\substack{\alpha+\beta=3\\ \alpha>0}}\bar{K}^{\alpha\beta}\alpha s^\beta\frac{1}{x}\frac{1}{s^6}e^{\nu\int_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(xs)ds\right\|_E\le$$

$$\le M_1\varepsilon\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}+M_2\varepsilon_2\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}=(M_1\varepsilon+M_2\varepsilon_2)\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)},$$

где $\max_{0\le s\le1}\left\|\sum_{\substack{\alpha+\beta=3\\ \alpha>0}}\bar{K}^{\alpha\beta}\alpha s^\beta\right\|_E\le M_2$, $\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1(1-s)\frac{1}{x}\frac{1}{s^6}e^{\nu\int_t^x\frac{dz}{z^2}}ds<\varepsilon_2$.

Следовательно,

$$\left\|\left(B_1^{(2)}u\right)(x)\right\|_{M_{2,\nu}^{1,0}}=\max\left\{\|\omega_0\|_{Q([0,\delta],E)},\|\omega_1\|_{Q([0,\delta],E)}\right\}\le$$

$$\le\max\left\{M_1\varepsilon_2\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)},(M_1\varepsilon+M_2\varepsilon_2)\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}\right\}=\max\left\{M_1\varepsilon_2,(M_1\varepsilon+M_2\varepsilon_2)\right\}\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}.$$

Значит

$$\left\|B_1^2\right\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}}\le\max\left\{M_1\varepsilon_2,(M_1\varepsilon+M_2\varepsilon_2)\right\}<\frac{\varepsilon_0}{3}$$

при достаточно малом δ.

Покажем, что $\left\|\left(B_1^3u\right)(x)\right\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}}<\dfrac{\varepsilon_0}{3}$, где $\left(B_1^3u\right)(x)=\int\limits_0^x(x-t)^2\sum\limits_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta u(t)dt$.

Пусть

$$\int\limits_0^x(x-t)^2\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta u(t)dt=e^{\nu\int\limits_x^\delta\frac{dz}{z^2}}\omega_0(x),$$

$$\int\limits_0^x\left[2(x-t)\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta+(x-t)^2\tilde{K}^{10}\right]u(t)dt=\frac{1}{x^2}e^{\nu\int\limits_x^\delta\frac{dz}{z^2}}\omega_1(x),$$

тогда

$$\left\|\omega_0(x)\right\|_{Q([0,\delta],E)}=\left\|e^{-\nu\int\limits_x^\delta\frac{dz}{z^2}}\int\limits_0^x(x-t)^2\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^\delta\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}=$$

$$=\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int\limits_0^x(x-t)^2\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_E=$$

$$=\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int\limits_0^1(1-s)^2\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}s^\beta\frac{1}{x^2s^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}\omega(xs)ds\right\|_E\le M_3\varepsilon_3\left\|\omega\right\|_{Q([0,\delta],E)},$$

где $\max\limits_{0\le s\le1}\left\|\sum\limits_{\alpha+\beta=1}\bar{K}^{\alpha\beta}s^\beta\right\|_E\le M_3$, $\max\limits_{0\le x\le\delta}\int\limits_0^1(1-s)^2\dfrac{1}{x^2s^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}ds<\varepsilon_3$, ε_3 – сколь угодно малое положительное число при достаточно малом δ.

$$\left\|\omega_1\right\|_{Q([0,\delta],E)}=\left\|x^2e^{-\nu\int\limits_x^\delta\frac{dz}{z^2}}\int\limits_0^x\left[2(x-t)\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta+(x-t)^2\tilde{K}^{10}\right]\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^\delta\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}\le$$

$$\le\left\|\int\limits_0^x2(x-t)\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^{\alpha+2}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}+\left\|\int\limits_0^x(x-t)^2\tilde{K}^{10}x^2\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_{Q([0,\delta],E)}=$$

$$=\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int\limits_0^x2(x-t)\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}x^{\alpha+2}t^\beta\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_E+\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int\limits_0^x(x-t)^2\tilde{K}^{10}x^2\frac{1}{t^6}e^{\nu\int\limits_t^x\frac{dz}{z^2}}\omega(t)dt\right\|_E=$$

$$= \max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1 2(1-s)\sum_{\alpha+\beta=1}\tilde{K}^{\alpha\beta}\frac{1}{x}s^{\beta}\frac{1}{s^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}\omega(xs)\,ds\right\|_E + \max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1 (1-s)^2\tilde{K}^{10}\frac{1}{x}\frac{1}{s^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}\omega(xs)\,ds\right\|_E \le$$

$$\le 2M_3\varepsilon_2\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)} + M_4\varepsilon_4\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)} = (2M_3\varepsilon_2 + M_4\varepsilon_4)\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)},$$

где $\left\|\tilde{K}^{10}\right\|_E \le M_4$, $\max\limits_{0\le x\le\delta}\int_0^1 (1-s)^2\frac{1}{x}\frac{1}{s^6}e^{\nu\frac{(1-s)}{xs}}ds < \varepsilon_4$.

Следовательно,

$$\left\|\left(B_1^3 u\right)(x)\right\|_{M_{2,\nu}^{1,0}} = \max\left\{\|\omega_0\|_{Q([0,\delta],E)}, \|\omega_1\|_{Q([0,\delta],E)}\right\} \le$$

$$\le \max\left\{M_3\varepsilon_3\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}, (2M_3\varepsilon_2 + M_4\varepsilon_4)\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}\right\} = \max\left\{M_3\varepsilon_3, (2M_3\varepsilon_2 + M_4\varepsilon_4)\right\}\|\omega\|_{Q([0,\delta],E)}.$$

Значит

$$\left\|B_1^3\right\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}} \le \max\left\{M_3\varepsilon_3, (2M_3\varepsilon_2 + M_4\varepsilon_4)\right\} < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

при достаточно малом δ.

Тогда $\|B_1\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}\to M_{2,\nu}^{1,0}} < \varepsilon_0$.

Частное решение уравнения (5) ищем в виде

$$\bar{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_k(x), \tag{7}$$

где $\bar{u}_k(x)$ – частное решение уравнения $A_1\bar{u}_k = f_k$, удовлетворяющее неравенству $\|\bar{u}_k\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}} \le c\|f_k\|_{M_{2,\nu}^{1,0}}$. Предположим, что такое решение существует при любом k, так как $f_0(x) = f(x) \in M_{2,\nu}^{1,0}$, $f_k(x) = -B_1\bar{u}_{k-1}(x) \in M_{2,\nu}^{1,0}$ $(k \ge 1)$.

Покажем, что существует такое $\delta > 0$, что при $0 \le x \le \delta$ ряд (7) сходится в пространстве $M_{2,\nu}^{0,-6}$. Действительно,

$$\|\bar{u}_k\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}} \le c\|f_k\|_{M_{2,\nu}^{1,0}} \le c\varepsilon_0\|\bar{u}_{k-1}\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}} \le \ldots \le (c\varepsilon_0)^k\|\bar{u}_0\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}} \le c(c\varepsilon_0)^k\|f\|_{M_{2,\nu}^{1,0}}.$$

Поэтому для сходимости ряда (7) в $M_{2,\nu}^{0,-6}$ достаточно взять δ таким, чтобы $c\varepsilon_0 < 1$. Нетрудно также видеть, что функция $\bar{u}(x)$ удовлетворяет уравнению (5)

$$A_1\bar{u}+B_1\bar{u}=A_1\sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_k(x)+B_1\sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_k(x)-f_{k+1}(x)\right]=f_0(x)=f(x).$$

Теперь решение уравнения (5) получим как сумму частного решения $\bar{u}(x)$ и решения однородного уравнения

$$A_1u+B_1u=0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) в пространстве $M_{2,\nu}^{0,-6}$ будем искать в виде $\upsilon(x)+w(x)$, где $\upsilon(x)$ – решение однородного уравнения $A_1\upsilon=0$, определяемое формулой $\upsilon(x)=\left(e^{\nu\int_x^{\delta}\frac{dz}{z^2}}e\right)^{(3)}$.

Поэтому

$$A_1w+B_1w=-B_1\upsilon\in M_{2,\nu}^{1,0}. \tag{9}$$

Методом, рассмотренным выше, найдем частное решение уравнения (9) $\bar{w}(x)$.

$$\|\bar{w}\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}c(c\varepsilon_0)^k\|B_1\upsilon\|_{M_{2,\nu}^{1,0}}\le\frac{c\varepsilon_0}{1-c\varepsilon_0}\|\upsilon\|_{M_{2,\nu}^{0,-6}},$$

следовательно, $\bar{w}(x)\ne-\upsilon(x)$, взяв δ таким, чтобы $c\varepsilon_0<\frac{1}{2}$.

Таким образом, решение уравнение (8) в пространстве $M_{2,\nu}^{0,-6}$ будет иметь вид $v_0(x)=\upsilon(x)+\bar{w}(x)$, а значит $u(x)=v_0(x)+\bar{u}(x)=\upsilon(x)+\bar{w}(x)+\bar{u}(x)$ – решение уравнения (5).

Теорема доказана.

Библиографический список

1 Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. 1977. – № 235 (4) – С. 772-774.

2 Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. 1978. – № 240

(2) – С. 268-271.

3 Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. – № 19 (4) – С. 970-988.

4 Крейн, С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Докл. РАН. 1997. – № 355 (4) – С. 450-452.

5 Крейн, С. Г. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // УМН. 1995. – № 50 (4) – С. 140.

6 Krein, S. G. Singular integral Volterra equations / S. G. Krein // Abstracts of Internat. Congress of Math. 1994. – С. 125.

7 Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equations with regular singularity / S. G. Krein, I. V. Sapronov // Укр. матем. журн. 1997. – № 49 (3) – С. 424-432.

8 Сапронов, И. В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2004. – № 6 – С. 48-58.

9 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2005. – № 2 – С. 81-83.

10 Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2007. – № 11 – С. 45-55.

11 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2011. – № 1 – С. 59-71.