УДК: 517.955.4

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ В ДВУМЕРНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

С. В. Писарева

Воронежская государственная лесотехническая академия

Пусть оператор A^+ задается дифференциальным выражением

$$A^+u(t,x,y) = \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y}, \quad t \geq 0, \; x, y \in R^1,$$

и областью определения $D(A^+) = \{u \in S^+_{p,\alpha,\beta}, A^+u \in C^1(S^+_{p,\alpha,\beta})\}$, где $S^+_{p,\alpha,\beta}$ – двумерные весовые пространства Степанова, задаваемые нормой

$$\|f\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}} = \sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}|f(x+\tau, y+\xi)|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}}$$

при $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $p \geq 1$.

Покажем, что оператор $-A^+$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U^+(t)$, задаваемой равенством

$$U^+(t)f = \begin{cases} f(x-t, y-t), при \quad t < \min\{x, y\}, \\ 0, при \quad t > \min\{x, y\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y \in R^1$.

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого $n>0$ оператор J_n (см. [1], стр. 334)

$$J_n = (I - n^{-1}(-A^+))^{-1} = nR(n, -A^+),$$

для которого выполняется условие

$$-A^+J_n f = n(J_n - I)f = nJ_n f - nf. \tag{2}$$

Введем семейство функций $F_n(x,y)$ с помощью равенства

$$F_n(x,y)=(J_n f)(x,y)=n\int_0^{\infty} e^{-nt}U^+(t)\,f dt.$$

В соответствии с (1) получаем

$$F_n(x,y)=n\int_0^{\min\{x,y\}} e^{-nt}\ f(x-t,y-t)dt.$$

В [2] было показано, что

$$(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\left(F_n(x,y)\right)=nF_n(x,y)-nf(x,y) \qquad (3)$$

для любых $x,y\in R^1$. Сравнивая полученное равенство с общей формулой (2), мы находим, что

$$-A^+F_n(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})F_n(x,y).$$

Поскольку $R(J_n)=R(R(n,-A^+))=D(-A^+)$, отсюда следует, что

$$-A^+\varphi(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\varphi(x,y)$$

при любом $\varphi\in D(-A^+)$.

Обратно, пусть теперь функции $\varphi(x,y)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ принадлежат обобщенным пространствам Степанова $S^+_{p,\alpha,\beta}$. Покажем, что $\varphi\in D(-A^+)$ и $-A^+\varphi(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\varphi(x,y)$. С этой целью определим с помощью соотношения

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-n\varphi(x,y)=-nf(x,y)$$

вспомогательную функцию $f(x,y)$. Полагая $F_n(x,y)=(J_n f)(x,y)$, мы, согласно полученным выше результатам, получим равенство

$$-\frac{\partial}{\partial x}F_n(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}F_n(x,y)-nF_n(x,y)=-nf(x,y).$$

Значит, функция $w(x,y)=\varphi(x,y)-F_n(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}=nw(x,y).$$

Решение этого дифференциального уравнения в частных производных согласно [3] (см. стр. 343) имеет вид

$$w(x,y)=Ce^{n(\psi(x-y)-y)},$$

где ψ – произвольная функция, $C=const$. Найдем значение константы C, при котором $w(x,y)\in S^{+}_{p,\alpha,\beta}$. В качестве произвольной функции выберем $\psi\equiv 0$ и получим оценку

$$\|w\|_{S^{+}_{p,\alpha,\beta}}=\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|Ce^{-n(y+\xi)}\right|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}}=$$

$$=C\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left[\int_0^1 y^{\beta-1}e^{-np(y+\xi)}\int_0^1 x^{\alpha-1}dxdy\right]^{\frac{1}{p}}=C\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left[\int_0^1 y^{\beta-1}e^{-np(y+\xi)}dy\right]^{\frac{1}{p}}=$$

$$=C\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left(e^{-n\xi}\left[\int_0^1 y^{\beta-1}e^{-npy}dy\right]^{\frac{1}{p}}\right)\geq C\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left(e^{-n\xi}\left[\int_0^1 y^{\beta-1}dy\right]^{\frac{1}{p}}\right)=$$

$$=C\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left(e^{-n\xi}\right).$$

Данное выражение может быть, конечно, только при $C=0$. Следовательно, $\varphi(x,y)=F_n(x,y)\in D(-A^{+})$.

Таким образом, область определения $D(-A^{+})$ оператора $-A^{+}$ совпадает с множеством ограниченных в двумерных весовых пространствах Степанова $S^{+}_{p,\alpha,\beta}$ функций $\varphi(x,y)$, частные производные первого порядка которых также принадлежат этому пространству, и для таких функций выполняется

$-A^{+}\varphi(x,y)=(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\varphi(x,y)$. Это означает, что дифференциальный оператор $-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $U^{+}(t)$.

В соответствии с [1] (стр. 357) построим полугруппу $U^{+}{}_{1/2}(t)f=U(t,-(A^{+})^{1/2})$, используя формулу

$$U(t,-(A^{+})^{1/2})f=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}t\cdot e^{\frac{-t^{2}}{4s}}\cdot s^{-3/2}U^{+}(s)fds.$$

Учитывая равенство (1), получим

$$U^{+}{}_{1/2}(t)f=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}t\cdot e^{\frac{-t^{2}}{4s}}\cdot s^{-3/2}f(x-s,y-s)ds,$$

при $s<\min\{x,y\}$.

Покажем, что полугруппа $U^{+}_{1/2}(t)$ действует из пространств $S^{+}_{p,\alpha,\beta}$ в $S^{+}_{p,\alpha,\beta}$, используя для оценки обобщенное интегральное неравенство Минковского [4],

$$\left\|U^{+}_{1/2}(t)f\right\|_{S^{+}_{p,\alpha,\beta}}=$$

$$=\sup_{(\tau,\xi)\in R^{2}}\left[\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}t\cdot e^{\frac{-t^{2}}{4s}}\cdot s^{-3/2}f(x+\tau-s,y+\xi-s)ds\right|^{p}dxdy\right]^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\sup_{(\tau,\xi)\in R^{2}}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-t^{2}}{4s}}\cdot s^{-3/2}\left[\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|f(x+\tau-s,y+\xi-s)\right|^{p}dxdy\right]^{\frac{1}{p}}ds\leq$$

$$\leq\|f\|_{S^{+}_{p,\alpha,\beta}}\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{t^{2}}{4s}}ds=\|f\|_{S^{+}_{p,\alpha,\beta}}.$$

В соответствии с методом, изложенным в монографии С. Г. Крейна [5], получаем, что дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} - \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y} = 0\,, \qquad (4)$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$u(0,x,y) = g_0(x,y), \qquad (5)$$

$$u(t,x,y) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\,, \qquad (6)$$

равномерно корректно разрешимо в двумерных весовых пространствах Степанова $S^{+}_{p,\alpha,\beta}$. При этом решение задачи (4)-(6) представимо в виде

$$u(t,x) = U^{+}{}_{1/2}(t) g_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t \cdot e^{\frac{-t^2}{4s}} \cdot s^{-3/2} g_0(x-s, y-s) ds\,,$$

при $s < \min\{\ x, y\}$.

Рассмотрим оператор A^{-}, задаваемый дифференциальным выражением

$$A^{-}u(t,x,y) = -\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y}, \quad t \geq 0\,, \quad x, y \in R^1$$

и областью определения $D(A^{-}) = \left\{ u \in S^{+}_{p,\alpha,\beta}, A^{-}u \in C^1(S^{+}_{p,\alpha,\beta}) \right\}$.

Можно показать, что оператор $-A^{-}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U^{-}(t)$, задаваемой равенством

$$U^{-}(t) f = \begin{cases} f(x+t, y+t), \textit{при} \quad t \in [0;+\infty); \\ 0, \textit{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

где $x, y \in R^1$. Очевидно, что полугруппа $U^{-}(t)$ ограничена в двумерных весовых пространствах Степанова $S^{+}_{p,\alpha,\beta}$.

Построим семейство операторов $C(t)$ следующим образом

$$\left(C(t) f \right)(x,y) = \frac{1}{2}\left[U^{+}(t) f + U^{-}(t) f \right](x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x-t, y-t) + f(x+t, y+t) \right].$$

Покажем, что это семейство является сильно непрерывной операторной косинус-функцией. Косинус-функция должна удовлетворять ряду условий [6]:

1 $C(t+s)+C(t-s)=2C(t)C(s)$, $\forall t,s\in R^1$;

2 $C(0)=I$;

3 $C(t)f\in C(R^1,\Phi)$ для каждого $f\in\Phi$.

Проверим выполнение этих условий:

1 Из следующих равенств

$$\left(C(t+s)f+C(t-s)f\right)(x,y)=\frac{1}{2}\left[f(x-t-s,y-t-s)+f(x+t+s,y+t+s)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[f(x-t+s,y-t+s)+f(x+t-s,y+t-s)\right]$$

и

$$\left(2C(t)C(s)f\right)(x,y)=2C(t)\left(\frac{1}{2}\left[f(x-s,y-s)+f(x+s,y+s)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x-s-t,y-s-t)+f(x+s-t,y+s-t)+f(x+s+t,y+s+t)\right)+$$

$$+f(x-s+t,y-s+t)\Big]$$

видно, что $C(t+s)+C(t-s)=2C(t)C(s)$.

2 Так как $\left(C(0)f\right)(x,y)=\frac{1}{2}\left[f(x-0,y-0)+f(x+0,y+0)\right]=f(x,y)$, то верно равенство $C(0)=I$.

3 Покажем, что если $f\in S^+_{p,\alpha,\beta}$, то также $\left(C(t)f\right)(x,y)\in S^+_{p,\alpha,\beta}$. Оценим косинус-функцию, применив интегральное неравенство Минковского,

$$\left\|C(t)f\right\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}}=$$

$$=\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|\frac{1}{2}\left(f(x+\tau-t,y+\xi-t)+f(x+\tau+t,y+\xi+t)\right)\right|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left(\left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|f(x+\tau-t,y+\xi-t)\right|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$+\left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|f(x+\tau+t,y+\xi+t)\right|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}}\Bigg)\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\|f\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}}+\|f\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}}\right)=\|f\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}}.$$

Для нахождения генератора A операторной косинус-функции воспользуемся соотношением $A=C''(0)$. Проведем вычисления

$$\left(C_t'(t)f\right)(x,y)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial f(x-t,y-t)}{\partial x}-\frac{\partial f(x-t,y-t)}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f(x+t,y+t)}{\partial x}+\frac{\partial f(x+t,y+t)}{\partial y}\right],$$

$$\left(C_t''(t)f\right)(x,y)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x-t,y-t)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(x-t,y-t)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(x-t,y-t)}{\partial y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x+t,y+t)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(x-t,y-t)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(x+t,y+t)}{\partial y^2}\right],$$

$$\left(C_t''(0)f\right)(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Таким образом, генератором операторной косинус-функции является оператор A, задаваемый дифференциальным выражением

$$Au(t,x,y)=\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}$$

и областью определения $D(A)=\left\{u\in S^+_{p,\alpha,\beta},\, Au\in C^2(S^+_{p,\alpha,\beta})\right\}$.

По теореме корректности (см. [6], стр. 176) следует, что для $u_0\in S^+_{p,\alpha,\beta}$ задача Коши

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} = Au(t,x,y), \quad t \ge 0, \tag{7}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{8}$$

$$u_t'(0,x,y) = 0 \tag{9}$$

равномерно корректна. При этом решение задачи (7)-(9) представимо в виде

$$u(t,x,y) = (C(t)u_0)(x,y) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-t, y-t) + u_0(x+t, y+t)\right].$$

Кроме того, оператор A порождает полугруппу $T(t)$ (см. [6], стр. 178), задаваемую формулой

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{\frac{-s^2}{4t}} C(s)ds.$$

Обозначим $(C(s)f)(x,y) = G(s,x,y)$. Ранее было показано, что если $f \in S^+_{p,\alpha,\beta}$, то $G(s,x,y) \in S^+_{p,\alpha,\beta}$. Покажем, что функция $(T(t)f)(x,y)$ также принадлежит $S^+_{p,\alpha,\beta}$, используя для оценки обобщенное интегральное неравенство Минковского,

$$\|T(t)f\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}} = \sup_{(\tau,\xi)\in R^2}\left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{\frac{-s^2}{4t}} G(s, x+\tau, y+\xi)ds\right|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sup_{(\tau,\xi)\in R^2} \int_0^\infty e^{\frac{-s^2}{4t}} \left[\int_0^1\int_0^1 x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left|G(s,x+\tau,y+\xi)\right|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}} ds \le$$

$$\le \|G(s,x,y)\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} ds = \|G(s,x,y)\|_{S^+_{p,\alpha,\beta}}$$

(здесь мы использовали факт, что при $a > 0$ верно $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$).

Из всего вышесказанного следует, что задачи Коши

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = Au(t,x,y), \quad t \ge 0, \tag{10}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{11}$$

где $u_0 \in S^{+}_{p,\alpha,\beta}$ и $u_0 \ge 0$ корректно разрешима. Решение задачи (10)-(11) представимо в виде

$$u(t,x,y) = (T(t)u_0)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4t}} \frac{1}{2} \left[u_0(x-s, y-s) + u_0(x+s, y+s) \right] ds.$$

Библиографический список

1 Иосида, К. Функциональный анализ : Учебник/ К. Иосида, пер. с англ. В. М. Волосова. – М. : Мир, 1965. – 624 с.

2 Писарева, С. В. О корректной разрешимости одной краевой задачи [Электронный ресурс] / С. В.Писарева // Воронежский научно-технический вестник – 2014. № 1(7). режим доступа – http://vestnikvglta.ru /index/ arkhiv_ nomerov/0-19 .

3 Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 468 с.

4 Беккенбах, Э. Неравенства / Э. Беккебах, Р. Беллман. – М. : Мир, 1965. – 276 с.

5 Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. – 464 с.

6 Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. – Киев : Выща школа, 1989. – 347 с.