УДК 517.968

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА С ОСОБЕННОСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. В. Сапронов, В. В. Зенина, Е. О. Уточкина
Воронежская государственная лесотехническая академия

1. Введение. На целесообразность рассмотрения уравнений Вольтерра с операторными ядрами обратил внимание М. М. Лаврентьев в докладе на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году. При этом он отталкивался от обратных задач для дифференциальных уравнений, а также задач интегральной геометрии. Им были получены некоторые теоремы единственности и устойчивости.

Существенное развитие теории линейных интегральных уравнений Вольтерра с особенностями было получено в [1]-[3], причем за основу бралось общее линейное интегральное уравнение Вольтерра III рода

$$g(x)\varphi(x)-\lambda\int_0^x F(x,t)\varphi(t)dt = f(x),\ g(0)=0,\ 0\le x\le\delta,$$

где λ – вещественный параметр.

В [1] показано существование однопараметрического семейства решений в случае $g(x)=x$, $\lambda=-1$, в [2] обобщены результаты [1] на систему таких уравнений. Наиболее интересные результаты получены в [3], где рассматривались вопросы разрешимости в специально введенном банаховом пространстве при произвольной функции $g(x)\ge 0$.

Дальнейшее развитие эта теория получила в [4]-[6], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и III рода, локальные решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида.

В последние годы исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в банаховых пространствах [7]-[13].

Целью данной работы является исследование интегрального уравнения Вольтерра I рода с особенностью и полиномиальным ядром в пространстве суммируемых на $[0,\delta]$ функций со значениями в банаховом пространстве E.

2. Постановка задачи. Формулировка основного результата. В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E .$$

В пространстве $C([0,\delta],E)$ непрерывных в норме E на $[0,\delta]$ функций со значениями в E, норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{C([0,\delta],E)} = \max_{0\le x\le\delta} \|\psi(x)\|_E .$$

Наконец, в пространстве C, состоящем из всех непрерывных в норме $L(E)$ на треугольнике $0\le t\le x\le\delta$ функций со значениями в $L(E)$, вводится норма

$$\|Q\|_C = \max_{0\le t\le x\le\delta} \|Q(x,t)\|_{L(E)} .$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^x K(x,t)u(t)\,dt = 0,\ (0\le x\le\delta) \tag{1}$$

в $L_1([0,\delta],E)$, где $u(x)$ – искомая суммируемая функция на $[0,\delta]$ со значениями в E, $K(x,t)$ – заданная функция со значениями в $L(E)$, которая имеет вид

$$K(x,t) = \sum_{\alpha+\beta=m}^{m+p} K^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta , \tag{2}$$

где $m\ge 1$, $p\ge 0$, m и p – натуральные числа.

Введем в рассмотрение операторный пучок

$$Q_\lambda = \sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\lambda-1}ds + A_m\,, \tag{3}$$

где $A_m = \sum_{\alpha+\beta=m} K^{\alpha\beta}$.

Напомним, что если вектор e является собственным вектором для операторного пучка $B(\lambda)$, отвечающим характеристическому числу λ_0, то векторы $e_1, e_2, ..., e_q$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} B(\lambda_0)e_1 + B'(\lambda_0)e = 0 \\ B(\lambda_0)e_2 + B'(\lambda_0)e_1 + \dfrac{1}{2}B''(\lambda_0)e = 0 \\ ------------------- \\ B(\lambda_0)e_q + B'(\lambda_0)e_{q-1} + ... + \dfrac{1}{q!}B^{(q)}(\lambda_0)e = 0, \end{cases}$$

образуют цепочку присоединенных векторов к собственному вектору e.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены следующие условия:

1) пучок (3) имеет характеристическое число $\lambda = \nu + i\mu \;\; (\nu > 0)$, а числа $(\nu + k) + i\mu \;\; (k = 1, 2, ..., N)$ не являются характеристическими для него;

2) характеристическому числу $\nu + i\mu$ соответствует собственный вектор $e = e_1 + ie_2$ и цепочка присоединенных векторов $e_k = e_1^k + ie_2^k \;\; (k = 1, 2, ..., q)$;

3) оператор $A_m = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{K(x,x)}{x^m}$ имеет ограниченный обратный;

4) натуральное число N такое, что

$$2\left\|K'_x(x,t)x^{1-m}\right\|_C \cdot \max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)} \cdot \int_0^1 s^{\nu+N}ds < 1. \tag{4}$$

Тогда для уравнения (1) существует $q+1$ – параметрическое семейство решений вида

$$u_l(x) = x^{\nu-1}\left[\sum_{r=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}x^i\sin(\mu\ln x) + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}x^i\cos(\mu\ln x)\right)\ln^r x + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{l}\left(a_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x) + b_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x)\right)\ln^r x\right], \tag{5}$$

где a_i^{rl} и b_i^{rl} $(l=0,\dots,q; i=1,\dots,N; r=0,\dots,l)$ – искомые коэффициенты в E, функции $a_{N+1}^{rl}(x)$, $b_{N+1}^{rl}(x)$ являются непрерывными на $[0,\delta]$ со значениями в банаховом пространстве E.

Заметим, что при $N\to\infty$ $\int_0^1 s^{\nu+N}ds\to 0$. Следовательно, при достаточно большом N неравенство (4) выполняется.

3. Построение решений. Уравнение (1) дифференцированием сводится к интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$K(x,x)u(x)=-\int_0^x K'_x(x,t)u(t)\,dt,$$

которое, используя (2), можно записать в виде

$$\sum_{k=m}^{m+p} A_k x^k u(x)=-\int_0^x\left[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}^{m+p} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha-1}t^{\beta}\right]u(t)\,dt, \tag{6}$$

где $A_k=\sum\limits_{\alpha+\beta=k} K^{\alpha\beta}$.

Подставляя (5) в (6), получаем в левой части

$$\sum_{k=m}^{m+p} A_k x^{k+\nu-1}\left[\sum_{r=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}x^i\sin(\mu\ln x)+\sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}x^i\cos(\mu\ln x)\right)\ln^r x+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{l}\left(a_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x)+b_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x)\right)\ln^r x\right]. \tag{7}$$

В полученной правой части

$$-\int_0^x\left[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}^{m+p} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha-1}t^{\beta}\right]t^{\nu-1}\left[\sum_{r=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}t^i\sin(\mu\ln t)+\sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}t^i\cos(\mu\ln t)\right)\ln^r t+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{l}\left(a_{N+1}^{rl}(t)t^{N+1}\sin(\mu\ln t)+b_{N+1}^{rl}(t)t^{N+1}\cos(\mu\ln t)\right)\ln^r t\right]dt \tag{8}$$

делаем замену $t = xs$. Тогда (8) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
-\int_0^1 \left[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}}^{m+p} K^{\alpha\beta} \alpha x^{\alpha+\beta-1} s^{\beta} \right] x^{\nu} s^{\nu-1} \left\{ \sum_{r=0}^{l} \left[\left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl} (xs)^i \cos(\mu \ln s) - \right.\right.\right. \\
\left. -\sum_{i=0}^{N} b_i^{rl} (xs)^i \sin(\mu \ln s) \right) \sin(\mu \ln x) + \left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl} (xs)^i \sin(\mu \ln s) + \right. \\
\left.\left. + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl} (xs)^i \cos(\mu \ln s) \right) \cos(\mu \ln x) \right] \left(\sum_{k=0}^{r} C_r^k \ln^k x \ln^{r-k} s \right) + \\
+ \sum_{r=0}^{l} \left[\left(a_{N+1}^{rl} (xs)(xs)^{N+1} \cos(\mu \ln s) - b_{N+1}^{rl} (xs)(xs)^{N+1} \sin(\mu \ln s) \right) \cdot \right. \\
\cdot \sin(\mu \ln x) + \left(a_{N+1}^{rl} (xs)(xs)^{N+1} \sin(\mu \ln s) + b_{N+1}^{rl} (xs)(xs)^{N+1} \cos(\mu \ln s) \right) \cdot \\
\left.\left. \cdot \cos(\mu \ln x) \right] \left(\sum_{k=0}^{r} C_r^k \ln^k x \ln^{r-k} s \right) \right\} ds.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu-1} \ln^l x \sin(\mu \ln x)$, $x^{m+\nu-1} \ln^l x \cos(\mu \ln x)$ в (7) и (9), получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
A_m a_0^{ll} &= -\sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta} \alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu-1} \left(a_0^{ll} \cos(\mu \ln s) - b_0^{ll} \sin(\mu \ln s) \right) ds, \\
A_m b_0^{ll} &= -\sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta} \alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu-1} \left(a_0^{ll} \sin(\mu \ln s) + b_0^{ll} \cos(\mu \ln s) \right) ds.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Покажем, что из соотношений (10) следует равенство в комплексификации банахова пространства E

$$
Q_{\nu+i\mu} \left(a_0^{ll} + i b_0^{ll} \right) = 0,
$$

которое означает, что вектор $a_0^{ll} + i b_0^{ll}$ является собственным вектором для операторного пучка Q_{λ} отвечающим характеристическому числу $\nu + i\mu$. Именно

$$
Q_{\nu+i\mu} = \sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta} \alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu+i\mu-1} ds + A_m = \sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta} \alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu-1} \left[\cos(\mu \ln s) + i \sin(\mu \ln s) \right] ds + A_m .
$$

Пользуясь равенствами (10), вычислим

$$A_m\left(a_0^{ll}+ib_0^{ll}\right)=-\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\Big[\left(a_0^{ll}\cos\left(\mu\ln s\right)-b_0^{ll}\sin\left(\mu\ln s\right)\right)+$$
$$+i\left(a_0^{ll}\sin\left(\mu\ln s\right)+b_0^{ll}\cos\left(\mu\ln s\right)\right)\Big]ds,$$

$$Q_{\nu+i\mu}\left(a_0^{ll}+ib_0^{ll}\right)=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\left[\cos\left(\mu\ln s\right)+i\sin\left(\mu\ln s\right)\right]\left(a_0^{ll}+ib_0^{ll}\right)ds+A_m\left(a_0^{ll}+ib_0^{ll}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\Big[\left(a_0^{ll}\cos\left(\mu\ln s\right)-b_0^{ll}\sin\left(\mu\ln s\right)\right)+i\left(a_0^{ll}\sin\left(\mu\ln s\right)+b_0^{ll}\cos\left(\mu\ln s\right)\right)\Big]ds+$$
$$+A_m\left(a_0^{ll}+ib_0^{ll}\right)=0.$$

Нетрудно заметить, что если $\bar{a}_0^{ll}+i\bar{b}_0^{ll}$ является собственным вектором операторного пучка (3), отвечающим характеристическому числу $\nu+i\mu$, то $a_0^{ll}=\bar{a}_0^{ll}$, $b_0^{ll}=\bar{b}_0^{ll}$ будет решением системы уравнений (10). Это означает, что $a_0^{ll}=e_1$, $b_0^{ll}=e_2$ является решением этой системы.

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu+\gamma-1}\sin\left(\mu\ln x\right)\ln^l x$ и $x^{m+\nu+\gamma-1}\cos\left(\mu\ln x\right)\ln^l x$ в (7) и (9), получаем систему уравнений для определения a_γ^{ll} и b_γ^{ll} $\left(\gamma=1,2,\ldots,N\right)$

$$\begin{aligned}&\sum_{k+i=m+\gamma}A_k a_i^{ll}=-\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1\left[s^{\beta+\nu+i-1}\left(a_i^{ll}\cos\left(\mu\ln s\right)-b_i^{ll}\sin\left(\mu\ln s\right)\right)\right]ds,\\ &\sum_{k+i=m+\gamma}A_k b_i^{ll}=-\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1\left[s^{\beta+\nu+i-1}\left(a_i^{ll}\sin\left(\mu\ln s\right)+b_i^{ll}\cos\left(\mu\ln s\right)\right)\right]ds.\end{aligned}\qquad(11)$$

Система (11) имеет единственное решение. В предположении противного система уравнений

$$\left[A_m+\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\cos\left(\mu\ln s\right)ds\right]f_1-\left[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\sin\left(\mu\ln s\right)ds\right]f_2=0,$$
$$\left[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\sin\left(\mu\ln s\right)ds\right]f_1+\left[A_m+\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\cos\left(\mu\ln s\right)ds\right]f_2=0,$$
$$(12)$$

имеет ненулевое решение $(f_1, f_2)^T$.

Из уравнений (12) следует

$$Q_{(\nu+\gamma)+i\mu}\left[f_1+if_2\right]=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\left[\cos\left(\mu\ln s\right)+i\sin\left(\mu\ln s\right)\right]\left(f_1+if_2\right)ds+A_m\left(f_1+if_2\right)=$$

$$=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\left[\left(\cos\left(\mu\ln s\right)f_1-\sin\left(\mu\ln s\right)f_2\right)+i\left(\sin\left(\mu\ln s\right)f_1+\cos\left(\mu\ln s\right)f_2\right)\right]ds+$$

$$+A_m f_1+iA_m f_2=0.$$

Следовательно, вектор f_1+if_2 является собственным вектором для операторного пучка Q_λ, отвечающим характеристическому числу $(\nu+\gamma)+i\mu$, что противоречит первому условию теоремы. Таким образом, коэффициенты a_γ^{ll}, b_γ^{ll} $(\gamma=1,\dots,N)$ однозначно определяются.

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu-1}\ln^{l-1}x\sin\left(\mu\ln x\right)$, $x^{m+\nu-1}\ln^{l-1}x\cos\left(\mu\ln x\right)$ в (7) и (9), получаем соотношения

$$\begin{aligned}A_m a_0^{l-1,l}&=-\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\left\{\sum_{r=l-1}^{l}\left(a_0^{rl}\cos\left(\mu\ln s\right)-b_0^{rl}\sin\left(\mu\ln s\right)\right)C_r^{l-1}\ln^{r-l+1}s\right\}ds,\\ A_m b_0^{l-1,l}&=-\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\left\{\sum_{r=l-1}^{l}\left(a_0^{rl}\sin\left(\mu\ln s\right)+b_0^{rl}\cos\left(\mu\ln s\right)\right)C_r^{l-1}\ln^{r-l+1}s\right\}ds.\end{aligned}\qquad(13)$$

Система уравнений (13) эквивалентна уравнению в комплексификации банахова пространства E

$$Q_{\nu+i\mu}\left(a_0^{l-1,l}+ib_0^{l-1,l}\right)+lQ'_{\nu+i\mu}e=0.\qquad(14)$$

Следовательно, $a_0^{l-1,l}+ib_0^{l-1,l}=le_1$ будет решением уравнения (14), а $a_0^{l-1,l}=le_1^1$, $b_0^{l-1,l}=le_2^1$ будет решением системы уравнений (13).

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu-1}\ln^{l-d}x\sin\left(\mu\ln x\right)$, $x^{m+\nu-1}\ln^{l-d}x\cos\left(\mu\ln x\right)$ $\left(d=2,3,\dots,l\right)$, получаем систему равенств, эквивалентную уравнению

$$Q_{\nu+i\mu}\left(a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l}\right)+(l-d+1)Q'_{\nu+i\mu}\left(a_0^{l-d+1,l}+ib_0^{l-d+1,l}\right)+$$
$$+(l-d+1)(l-d+2)\frac{1}{2!}Q''_{\nu+i\mu}\left(a_0^{l-d+2,l}+ib_0^{l-d+2,l}\right)+ \qquad (15)$$
$$+(l-d+1)(l-d+2)\cdot\ldots\cdot l\frac{1}{d!}Q^{(d)}_{\nu+i\mu}\left(a_0^{l,l}+ib_0^{l,l}\right)=0.$$

Нетрудно по индукции доказать, что решением уравнения (15) будет $a_0^{ll}+ib_0^{ll}=e$, $a_0^{l-1,l}+ib_0^{l-1,l}=le_1$, $a_0^{l-2,l}+ib_0^{l-2,l}=l(l-1)e_2,\ldots,$ $a_0^{l-d+1,l}+ib_0^{l-d+1,l}=l(l-1)\cdot\ldots\cdot(l-d+2)e_{d-1}$, $a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l}=l(l-1)\cdot\ldots\cdot(l-d+1)e_d$.

Следовательно, $a_0^{l-d,l}=\frac{l!}{(l-d)!}e_1^d$, $b_0^{l-d,l}=\frac{l!}{(l-d)!}e_2^d$ $(d=2,3,\ldots,l)$.

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu+\gamma-1}\sin(\mu\ln x)\ln^{l-d}x$, $x^{m+\nu+\gamma-1}\cos(\mu\ln x)\ln^{l-d}x$ $(d=1,2,\ldots,l;\gamma=1,2,\ldots,N)$, получаем систему уравнений, которая в силу первого условия теоремы имеет единственное решение. Это означает, что коэффициенты $a_\gamma^{l-d,l}$ и $b_\gamma^{l-d,l}$ $(d=1,2,\ldots,l;\gamma=1,2,\ldots,N)$ однозначно определяются.

Для того чтобы функция (5) была решением уравнения (6), функции $a_{N+1}^{rl}(x)$ и $b_{N+1}^{rl}(x)$ со значениями в банаховом пространстве E должны удовлетворять уравнению

$$\sum_{k+i\geq m+N+1}A_k x^{k+\nu+i-1}\left[\sum_{r=0}^{l}\left(a_i^{rl}\sin(\mu\ln x)+b_i^{rl}\cos(\mu\ln x)\right)\ln^r x\right]+$$
$$+\sum_{k=m}^{m+p}A_k x^{k+\nu+N}\left[\sum_{r=0}^{l}\left(a_{N+1}^{rl}(x)\sin(\mu\ln x)+b_{N+1}^{rl}(x)\cos(\mu\ln x)\right)\ln^r x\right]=$$
$$=-\int_0^1\left[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i\geq m+N+1\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+\nu+i-1}\right]s^{\beta+\nu+i-1}\left\{\sum_{r=0}^{l}\left[\left(a_i^{rl}\cos(\mu\ln s)-\right.\right.\right.$$
$$\left.-b_i^{rl}\sin(\mu\ln s)\right)\sin(\mu\ln x)+\left(a_i^{rl}\sin(\mu\ln s)+b_i^{rl}\cos(\mu\ln s)\right)\cos(\mu\ln x)\cdot$$
$$\left.\cdot\left(\sum_{k=0}^{r}C_r^k\ln^k x\ln^{r-k}s\right)\right\}ds-\int_0^1\left[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}^{m+p}K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+\nu+N}\right]s^{\beta+\nu+N}\cdot$$
$$\cdot\left\{\sum_{r=0}^{l}\left[\left(a_{N+1}^{rl}(xs)\cos(\mu\ln s)-b_{N+1}^{rl}(xs)\sin(\mu\ln s)\right)\sin(\mu\ln x)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(a_{N+1}^{rl}(xs)\sin(\mu\ln s)+b_{N+1}^{rl}(xs)\cos(\mu\ln s)\right)\cos(\mu\ln x)\right]\left(\sum_{k=0}^{r}C_r^k\ln^k x\ln^{r-k}s\right)\right\}ds.$$

Приравнивая выражения при $x^{m+N+\nu}\sin(\mu\ln x)\ln^{\gamma}x$ и $x^{m+N+\nu}\cos(\mu\ln x)\ln^{\gamma}x$ $(\gamma=l,l-1,\dots,0)$, получаем равенства, которые можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{K(x,x)}{x^m}a_{N+1}^{\gamma l}(x)=\int_0^1\left[K_x'(x,xs)x^{1-m}\right]s^{\nu+N}\left[-a_{N+1}^{\gamma l}(xs)\cos(\mu\ln s)+\right.\\ \left.+b_{N+1}^{\gamma l}(xs)\sin(\mu\ln s)\right]ds+f_1^{\gamma}(x),\\ \frac{K(x,x)}{x^m}b_{N+1}^{\gamma l}(x)=\int_0^1\left[K_x'(x,xs)x^{1-m}\right]s^{\nu+N}\left[-a_{N+1}^{\gamma l}(xs)\sin(\mu\ln s)-\right.\\ \left.-b_{N+1}^{\gamma l}(xs)\cos(\mu\ln s)\right]ds+f_2^{\gamma}(x),\end{gathered}\tag{16}$$

где $f_1^{\gamma}(x)$ и $f_2^{\gamma}(x)$ – известные непрерывные на $[0,\delta]$ функции со значениями в банаховом пространстве E $(\gamma=l,l-1,\dots,0)$.

Оператор-функция $\dfrac{K(x,x)}{x^m}$ непрерывна по норме в нуле и имеет ограниченный обратный, тогда при x из достаточно малой окрестности нуля $0\le x\le\delta$ существует ограниченный обратный оператор $\left[\dfrac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}$, который непрерывен по норме на $[0,\delta]$.

Следовательно, система уравнений (16) при $x\in[0,\delta]$ может быть переписана в виде

$$\begin{gathered}a_{N+1}^{\gamma l}(x)=\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\int_0^1\left[K_x'(x,xs)x^{1-m}\right]s^{\nu+N}\left[-a_{N+1}^{\gamma l}(xs)\cos(\mu\ln s)+\right.\\ \left.+b_{N+1}^{\gamma l}(xs)\sin(\mu\ln s)\right]ds+\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}f_1^{\gamma}(x),\\ b_{N+1}^{\gamma l}(x)=\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\int_0^1\left[K_x'(x,xs)x^{1-m}\right]s^{\nu+N}\left[-a_{N+1}^{\gamma l}(xs)\sin(\mu\ln s)-\right.\\ \left.-b_{N+1}^{\gamma l}(xs)\cos(\mu\ln s)\right]ds+\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}f_2^{\gamma}(x).\end{gathered}\tag{17}$$

Рассмотрим банахово пространство $E\times E=\left\{z:z=(u,\upsilon)^T,u\in E,\upsilon\in E;\|z\|_{E\times E}=\|u\|_E+\|\upsilon\|_E\right\}$. Обозначим через $C([0,\delta],E\times E)$

пространство непрерывных на $[0,\delta]$ в норме банахова пространства $E\times E$ функций с нормой $\|z(x)\|_{C([0,\delta],E\times E)}=\max_{0\le x\le\delta}\|z(x)\|_{E\times E}$.

Пусть

$$z^{\gamma}(x)=\left(z_1^{\gamma}(x),z_2^{\gamma}(x)\right)^T=\left(a_{N+1}^{\gamma l}(x),b_{N+1}^{\gamma l}(x)\right)^T\in C\left([0,\delta],E\times E\right),$$

$$f^{\gamma}(x)=\left(\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}f_1^{\gamma}(x),\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}f_2^{\gamma}(x)\right)^T\in C\left([0,\delta],E\times E\right).$$

Тогда систему уравнений (17) можно переписать в операторной форме

$$z^{\gamma}(x)=\left(Bz^{\gamma}\right)(x)+f^{\gamma}(x), \tag{18}$$

где оператор B действует на непрерывную на $[0,\delta]$ в норме банахова пространства $E\times E$ функцию $z^{\gamma}(x)$ со значениями в $E\times E$ по формуле

$$\left(Bz^{\gamma}\right)(x)=\int_0^1 s^{\nu+N}\bar{K}(x,s)z^{\gamma}(xs)\,ds,$$

где

$$\bar{K}(x,s)=\begin{pmatrix}-\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\cos(\mu\ln s) & \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\sin(\mu\ln s)\\ -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\sin(\mu\ln s) & -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\cos(\mu\ln s)\end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора B в пространстве $C\left([0,\delta],E\times E\right)$

$$\left\|\left(Bz^{\gamma}\right)(x)\right\|_{C([0,\delta],E\times E)}=\max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1 s^{\nu+N}\bar{K}(x,s)\,z^{\gamma}(xs)\,ds\right\|_{E\times E}\le\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1\left\|s^{\nu+N}\bar{K}(x,s)\,z^{\gamma}(xs)\right\|_{E\times E}ds=$$

$$=\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 s^{\nu+N}\left\{\left\|-\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\cos(\mu\ln s)\,z_1^{\gamma}(xs)+\right.\right.$$

$$\left.+\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\sin(\mu\ln s)\,z_2^{\gamma}(xs)\right\|_E+$$

$$+\left\|-\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\sin(\mu\ln s)\,z_1^{\gamma}(xs)-\right.$$

$$\left.\left.-\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\cos(\mu\ln s)\,z_2^{\gamma}(xs)\right\|_E\right\}ds\le$$

$$\le\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 s^{\nu+N}\left\{\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\cos(\mu\ln s)\,z_1^{\gamma}(xs)\right\|_E+\right.$$

$$+\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\sin(\mu\ln s)\,z_2^{\gamma}(xs)\right\|_E+$$

$$+\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\sin(\mu\ln s)\,z_1^{\gamma}(xs)\right\|_E+$$

$$\left.+\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\cos(\mu\ln s)\,z_2^{\gamma}(xs)\right\|_E\right\}ds\le$$

$$\le\max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)}\cdot\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 2s^{\nu+N}\left\|K'_x(x,xs)\,x^{1-m}\right\|_{L(E)}\cdot$$

$$\cdot\left(\left\|z_1^{\gamma}(xs)\right\|_E+\left\|z_2^{\gamma}(xs)\right\|_E\right)ds\le\max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)}\cdot$$

$$\cdot 2\left\|K'_x(x,t)\,x^{1-m}\right\|_C\int_0^1 s^{\nu+N}ds\left\|z^{\gamma}(x)\right\|_{C([0,\delta],E\times E)}.$$

Следовательно, в силу неравенства (4)

$$\|B\|_{C([0,\delta],E\times E)\to C([0,\delta],E\times E)}\le 2\left\|K'_x(x,t)\,x^{1-m}\right\|_C\cdot\max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)}\cdot\int_0^1 s^{\nu+N}ds<1.$$

Это означает, что поэтапно каждое уравнение в (18) при $\gamma = l, l-1, \ldots, 0$ однозначно разрешимо методом последовательных приближений. Теорема доказана.

Для уравнения (6) можно построить еще одно семейство решений $\{\upsilon_l(x)\}_{l=0}^q$ вида (5), если вместо собственного вектора $e = e_1 + ie_2$ и цепочки присоединенных к нему векторов $e_k = e_1^k + ie_2^k$ взять собственный вектор $ie = -e_2 + ie_1$ и цепочку присоединенных векторов $ie_k = -e_2^k + ie_1^k$ операторного пучка (3). Нетрудно доказать, что решения $\{u_e(x)\}_{l=0}^q$ и $\{\upsilon_l(x)\}_{l=0}^q$ будут линейно независимы в совокупности.

Замечание. Если операторный пучок (3) имеет характеристическое число $\lambda = \nu > 0$, которому соответствует собственный вектор e и цепочка присоединенных векторов $\{e_k\}_{k=0}^q$, то для уравнения (1) существует $q+1-$параметрическое семейство решений вида

$$u_l(x) = x^{\nu-1}\sum_{r=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}x^i + a_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\right)\ln^r x,\ l = 0,\ldots,q.$$

В [11] для интегрального уравнения Вольтерра II рода доказана полнота системы указанных решений (5). Аналогично можно показать, что такой результат справедлив и для уравнения, рассматриваемого в данной работе.

4. Пример. Радиальное дифференциальное уравнение Шредингера для определения волновой функции сводится к интегральному уравнению

$$\Phi_{l,p}(r) = \bar{j}_l(pr) + \lambda\int_0^r dr' g_{l,p}(r,r')U(r')\Phi_{l,p}(r'). \tag{19}$$

Рассмотрим случай $l = 0$, $\lambda = 1$, когда $\bar{j}_0(pr) = \sin pr$, а функция Грина $g_{0,p}(r,r')$ равна просто $p^{-1}\sin p(r-r')$, $U(r) = 2m\frac{1}{r}$. Нас интересует поведение решения уравнения (19) вблизи нуля, поэтому будем считать, что $p^{-1}\sin p(r-r') \approx r - r'$, $\sin pr \approx pr$. Тогда рассматриваемое уравнение можно свести к интегральному уравнению Вольтерра I рода

$$\int_0^r K(r,r')\bar{\Phi}_{0,p}(r')dr' = 0,$$

где $\bar{\Phi}_{0,p}(r) = \left(\tilde{\Phi}_{0,p}(r),1\right)^T$, $\bar{\Phi}_{0,p} = \frac{1}{r}\Phi_{0,p}(r)$, $K(r,r') = \begin{pmatrix} m(r-r')^2 - r' & p(r-r') \\ 0 & r-2r' \end{pmatrix}$.

$Q_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{p}{\lambda} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} - 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_0 = 1$, $e = (p,1)^T$.

Решение уравнения (19) будем искать в виде

$$\bar{\Phi}_{0,p}(r) = r^{\lambda-1}\sum_{i=0}^{N} a_i^{00} r^i + a_{N+1}^{00}(r) r^{N+1} = \sum_{i=0}^{N} a_i^{00} r^i + a_{N+1}^{00}(r) r^{N+1}.$$

В нашем случае $a_0^{00} = (p,1)^T$, $a_1^{00} = (mp,0)^T$.

Следовательно, $\bar{\Phi}_{0,p}(r) \approx (p + mpr, 1)$, $\bar{\Phi}_{0,p}(r) \approx p + mpr$, $\Phi_{0,p} \approx pr + mpr^2$.

Библиографический список

1 Sato, T. Sur 1'equation integrale / T. Sato // J. Math, Soc. Japan, 5:2. 1953 P. 145-153.

2 Takesada, T. On the singular point of integral equations of Volterra type / T. Takesada // J. Math, Soc. Japan, 7:2. 1955 P. 123-136.

3 Панов, Л. И. Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка / Панов Л. И. // ДАН Тадж. ССР, 10:6. 1967 С. 3-7.

4 Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. 1977. № 235 (4) С. 772-774.

5 Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. 1978. № 240 (2) С. 268-271.

6 Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. № 19 (4) С. 970-988.

7 Крейн, С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Докл. РАН. 1997. № 355 (4) С. 450-452.

8 Крейн, С. Г. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // УМН. 1995. № 50 (4) С. 140.

9 Krein, S. G. Singular integral Volterra equations / S. G. Krein // Abstracts of Internat. Congress of Math. 1994. С. 125.

10 Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equations with regular singularity / S. G. Krein, I. V. Sapronov // Укр. матем. журн. 1997. № 49 (3) С. 424-432.

11 Сапронов, И. В. О системе решений интегрального уравнения с полиномиальным ядром / И. В. Сапронов // Изв. РАЕН, Серия МММИУ, 5:4. 2001 С. 5-16.

12 Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра 1 рода с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов, С. С. Веневитина, В. В. Зенина // ВЗМШ, Научная книга. 2014 С. 290-295.

13 Сапронов, И. В. Интегральное уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Воронежский научно-технический вестник, ВГЛТА № 2 (8). 2014 С. 86-91.