УДК 517.928.2

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

П. Н. Зюкин, И. В. Сапронов, Е. О. Уточкина
Воронежская государственная лесотехническая академия

Рассматривается задача Коши

$$(x+\varepsilon)\frac{dy_\varepsilon}{dx}+B(x)y_\varepsilon=f(x), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0)=\psi(\varepsilon), \tag{2}$$

где $x\in[0,\,1]$, $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0]$, $f(x)$, $\psi(\varepsilon)$ – функции со значениями в комплексном банаховом пространстве E, определенные на промежутках $[0,\,1]$, $(0,\,\varepsilon_0]$ соответственно, $B(x)$ – определенная на отрезке $[0,\,1]$ функция со значениями в пространстве L линейных ограниченных операторов, действующих из E в E. Дифференциальное уравнение (1) при $\varepsilon=0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$x\frac{dy}{dx}+B(x)y=f(x), \tag{3}$$

которое вырождается при $x=0$. Для задачи (1), (2) представляет интерес выяснение условий сходимости ее решений и их производных к гладкому на отрезке $[0,\,1]$ решению дифференциального уравнения (3) и его производным при $\varepsilon\to 0$.

В [1] доказана следующая

Теорема 1. Пусть k – наименьшее из натуральных чисел k_1 таких, что число $-k_1$ меньше действительной части любой точки спектра оператора $B(0)$.

Пусть в дифференциальном уравнении (3) $B(x)\in C^n\left([0,\,1];L\right)$, $f(x)\in C^n\left([0,\,1];E\right)$, где n – натуральное число, $n\ge k,$ а также выполнено условие

1)существуют элементы $\varphi_0,\varphi_1,\,...,\varphi_{k-1}$ пространства E такие, что

$$B(0)\varphi_0 = f(0)$$

и

$$(B(0)+mI)\varphi_m+\sum_{j=1}^{m}C_m^jB^{(j)}(+0)\varphi_{m-j} = f^{(m)}(+0),\quad m=1,2,...,k-1,$$

при $k>1,$ где I – тождественный оператор в $E.$ Тогда существует решение $y(x)$ дифференциального уравнения (3), принадлежащее $C^n\left([0,1];E\right)$ и удовлетворяющее условиям

$$y^{(m)}(+0)=\varphi_m,\quad m=0,1,...,k-1. \tag{4}$$

Замечание 1. Если условие 1) нарушено, а остальные условия теоремы 1 выполнены, то [1, замечание 1] уравнение (3) не имеет решения, принадлежащего $C^k\left([0,1];E\right)$.

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 1, то [1, теорема 3] каждому набору $\varphi_0,\varphi_1,\,...,\varphi_{k-1}$ элементов пространства E, для которых выполнено условие 1), соответствует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (3), принадлежащее $C^k\left([0,1];E\right)$ и удовлетворяющее условиям (4).

В [2] (теорема 3 и замечания 1, 3), в частности, доказано, что если $B(x)\in C^1\left([0,1];L\right)$, $f(x)\in C^1\left([0,1];E\right)$ и спектр оператора $B(0)$ расположен в открытой правой полуплоскости комплексной плоскости, то для равномерной по $x\in[0,\,1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ задачи (1), (2) к решению $y(x)$ дифференциального уравнения (3), принадлежащему $C^1\left([0,1];E\right)$, достаточно, чтобы $\psi(\varepsilon)\to y(0)$ при $\varepsilon\to 0.$

В настоящей работе рассматривается случай $B(x)=\lambda(x)I,$ где $\lambda(x)$ – комплекснозначная функция, $\operatorname{Re}\lambda(0)\le 0.$ В этом случае спектр оператора $B(0)$ состоит из одного числа $\lambda(0).$ Предполагается, что $\lambda(x)\in C^k\left([0,1];\mathbb{C}^1\right),$ $f(x)\in C^k\left([0,1];E\right),$ где k – наименьшее из натуральных чисел k_1 таких, что $-k_1<$ $\operatorname{Re}\lambda(0).$ Предполагается также, что выполнено условие 1). Устанавливается условие на поведение функции $\psi(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0,$ необходимое и достаточное для равномерной по $x\in[0,1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ задачи (1), (2) к решению $y(x)$ дифференциального уравнения (3), принадлежащему $C^k\left([0,1];E\right),$ при $\varepsilon\to 0.$ В случае $\lambda(x)=const,$ $k>1$ это условие является также необходимым и достаточным для равномерной по $x\in[0,1]$ сходимости производных $y_\varepsilon^{(j)}(x)$ к соответствующим производным $y^{(j)}(x)$ при $\varepsilon\to 0,$ $j=1,2,\ldots,k-1.$

Эволюционный оператор соответствующего уравнению (1) однородного дифференциального уравнения будем обозначать $U_\varepsilon(x,s).$

Из теоремы 1 и замечания 5 в [3] вытекает

Теорема 2. Пусть в дифференциальном уравнении (1) $B(x)=\lambda(x)I,$ где $\lambda(x)$ – комплекснозначная функция, k – наименьшее из натуральных чисел k_1 таких, что $-k_1<$ $\operatorname{Re}\lambda(0),$ $\lambda(x)\in C^k\left([0,1];\mathbb{C}^1\right),$ $f(x)\in C^k\left([0,1];E\right).$ Пусть выполнено условие 1), при $k>1$ число $\delta,$ $\delta\in[0,1],$ таково, что $\lambda(x)+j-1\ne 0$ для всех $x\in[0,\delta],$ $j=1,2,\ldots,k-1,$ $y(x)$ – решение соответствующего уравнению (1) дифференциального уравнения (3), принадлежащее $C^k\left([0,1];E\right),$ $p_0(x)\equiv y(x),$

$$p_j(x)\equiv-(\lambda(x)+j-1)p'_{j-1}(x),\quad j=1,2,\ldots,k-1,$$

при $k>1,$ $x\in[0,\delta].$ Тогда для равномерной по $x\in[0,1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (1), (2) к $y(x)$ при $\varepsilon\to 0$ необходимо и достаточно, чтобы функции

$$U_\varepsilon(x,0)(\psi(\varepsilon)-\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon^j p_j(0))$$

равномерно по $x \in [0,\ 1]$ сходились к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Легко видеть, что из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\operatorname{Re}\lambda(0) = b \le 0$. Тогда для равномерной по $x \in [0,\ 1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (1), (2) к $y(x)$ при $\varepsilon \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon^j p_j(0) + \varepsilon^{-b}\alpha(\varepsilon), \qquad (5)$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2, $\lambda(x) = \lambda = const$, $\operatorname{Re}\lambda = b \le -1$, j – натуральное число, $j \le k-1$. Тогда производные $y_\varepsilon^{(j)}(x)$ решений $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (1), (2) равномерно по $x \in [0,\ 1]$ сходятся к $y^{(j)}(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в том и только том случае, если функция $\psi(\varepsilon)$ имеет вид (5), где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Библиографический список

1 Зюкин, П. Н. О гладких решениях линейного вырождающегося дифференциального уравнения [Текст] / П. Н. Зюкин // Математические модели и операторные уравнения: сб. научн. тр. / ВорГУ. – Воронеж, 2003. – Т. 2. – С. 68 – 74.

2 Зюкин, П. Н. О поведении решений задачи Коши для возмущенного вырождающегося дифференциального уравнения в критическом случае [Текст] / П. Н. Зюкин; ВГЛТА. – Воронеж, 2004.– 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 25.11.2004, № 1867.

3 Зюкин, П. Н. О поведении решений задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения с малым параметром [Текст] / П. Н. Зюкин ; ВГЛТА. – Воронеж, 2009. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.07.2009, № 417 – В 2009.