УДК 519.217.2 + 519.872.6

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПЕЙ МАРКОВА К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

В.А. Зеликов, С.С. Веневитина, Е.О. Уточкина, О.А. Зеликова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»

Данные, полученные в результате наблюдений за транспортным потоком можно классифицировать как процесс. При этом если процесс можно описать явными математическими формулами в терминах детерминированных переменных, то это – детерминированный процесс [1]. Если любое наблюдение со случайными исходами принимает один вариант из множества возможных, то получим вероятностный случайный процесс. Объектом такого процесса является случайная величина, которая зависит от времени.

Одним из основных признаков, по которым классифицируют случайные процессы, является отношение зависимости между сечениями случайного процесса [2,3]. Сечением случайного процесса будем считать случайную величину, которая характеризует исследуемое случайное явление в некоторый момент времени (временной срез случайного процесса). Поэтому случайный процесс называется марковским, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние. В реальных условиях любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из «прошлого», от которых зависит «будущее», включить в «настоящее». Для марковского процесса будущее зависит от прошлого только через настоящее [1].

Марковские процессы на практике обычно не встречаются, нередко приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. При изучении таких процессов применяют марковские модели. Наиболее простыми являются марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем.

Марковский процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния $M_1, M_2, M_3, \ldots$ можно заранее перечислить (перенумеровать), и переход системы из состояния в состояние переходит практически мгновенно («скачком»), без изменения времени ($\Delta t \to 0$). Например, транспортный поток может находиться в состояниях: M_0 – начальное состояние транспортного потока, M_1 – автомобиль догнал впереди идущий, M_2 – произошел обгон, M_3 – автомобиль покинул данный участок. Процессом с непрерывным временем назовем процесс если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны, т.е. если переход может осуществиться в принципе в любой момент. В тоже время если процесс марковский и моменты возможных переходов из состояния в состояние фиксированы, то этот процесс с дискретным временем называется марковской цепью [1].

Для исследования транспортных потоков будем рассматривать только марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Для построения математической модели марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем необходимо ввести понятие потока событий и его некоторых характеристик.

Потоком событий будем считать последовательность однотипных ситуаций, следующих одна за другой в какие-либо случайные моменты времени.

Введем некоторые характеристики потока событий. Важнейшей характеристикой является интенсивность потока λ – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной (λ = const), так и зависящей от времени t.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно другим через определенные равные промежутки времени. Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность λ стационарного потока должна быть постоянной. Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из участков, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Поток событий называется ординарным, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по несколько событий сразу. Например, поток событий – прохождение автомобилей мимо наблюдателя по дороге с однорядным движением.

Поток событий называется стационарным пуассоновским (простейшим), если он стационарен, ординарен и не имеет последействия.

Пуассоновский поток играет среди других потоков особую роль. Это связано с тем, что при наложении (суперпозиции) достаточно большого числа независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к пуассоновскому.

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал времени Δt между соседними событиями будет иметь показательное распределение с плотностью

$$f\left(\Delta t\right)=\lambda e^{-\lambda\Delta t},\left(\Delta t>0\right). \tag{1}$$

Величина λ в (1) называется параметром показательного закона.

Введем коэффициент вариации для случайного интервала времени *T*, который можно найти как отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию

$$\nu_T=\frac{\sigma_T}{m_T}.$$

После этого сделаем вывод о том, что для простейшего потока событий коэффициент вариации интервалов между событиями равен единице, так как для показательного распределения

$$\sigma_T=m_T=\frac{1}{\lambda}.$$

Для регулярного потока событий ($\sigma_T=0$), коэффициент вариации будет равен $\nu_T=0$. Для большинства потоков событий, встречающихся на практике, коэффициент вариации интервалов между событиями заключен между 0 и 1 и служит мерой степени регулярности потока.

Простейший поток зависит от многих параметров и поэтому величина числа событий *N* за время Δt для простейшего потока подчиняется распределению Пуассона:

$$P_{N=k}=\frac{\left(\lambda\Delta t\right)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}. \tag{2}$$

Вероятность не появления на интервале времени Δt ни одного события равна $P_{N=0} = e^{-\lambda\Delta t}$, более одного $P_{N>0} = 1 - e^{-\lambda\Delta t}$.

Если промежуток времени достаточно мал ($0 < \Delta t <<< 1$), то величина экспоненты в (2) $e^{-\lambda\Delta t} \approx 1$. Тогда вероятность появления на таком малом интервале времени ровно одного события

$$P_{N=1} = \lambda\Delta t, \quad \Delta t << 1, \quad \Delta t > 0. \tag{3}$$

Рассмотрим моделирование марковского случайного процесса на примере транспортного потока [2,5]. Для этого составим и решим уравнения Колмогорова, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний транспортного потока.

Назовем вероятностью i-го состояния вероятность $p_i(t)$ того, что система в момент времени t находится в состояний M_i. В связи с тем, что число состояний конечно и система находится хотя бы в одном из них, то в любой момент времени справедливо следующее так называемое нормировочное условие:

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(t) = 1, \tag{4}$$

где N – число состояний системы.

Пусть система M имеет четыре состояния: M_1, M_2, M_3, M_4; размеченный граф, состояний транспортного потока [4] показан на рис. 1.

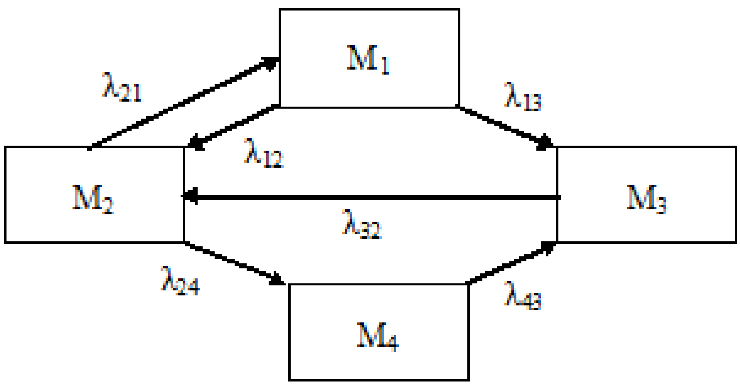


Рисунок 1 – Граф состояний транспортного потока

Переход системы из состояния i в состояние j представляет собой простейший поток с интенсивностью λ_{ij}. Рассмотрим одну из вероятностей состояния, например $p_1(t)$ – вероятность того, что в момент t система (транспортный поток) будет в состоянии M_1. Придадим t малое приращение Δt и найдем $p_1(t+\Delta t)$ – вероятность того, что в момент $(t+\Delta t)$ транспортный поток будет в состоянии M_1. Это произойдет, в двух случаях: либо в момент t транспортный поток уже был в состоянии M_1, а за время Δt не вышел из него; либо в момент t транспортный поток был в состоянии M_2, а за время Δt перешел из него в состояние M_1

Рассмотрим первый случай.

Система (транспортный поток) находится в состоянии M_1. В этом случае возможен переход в состояние M_2 или M_3. Но это несовместные события. Известно, что для двух несовместных событий вероятности суммируются:

$$(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t.$$

Тогда найдем противоположное событие, что транспортный поток останется в состояние M_1:

$$1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t.$$

Вероятность оказаться в состоянии M_1 к моменту времени t у системы равна $p_1(t)$ и последующие переходы не зависят от того, каким образом, система пришла к этому состоянию, то воспользуемся формулой умножения вероятностей и найдем вероятность первого случая:

$$p_1(t)\left[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t\right].$$

По аналогии, найдем вероятность второго варианта $p_2(t)\lambda_{21}\Delta t$. В связи, с тем, что первый и второй варианты несовместны, то вероятность для системы находиться к моменту времени $(t+\Delta t)$ в состоянии M_1 равна:

$$p_1(t+\Delta t) = p_1(t)\left[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t\right] + p_2(t)\lambda_{21}\Delta t,$$

где

$$\left[p_1(t+\Delta t) - p_1(t)\right]/\Delta t = \lambda_{21} p_2(t) - (\lambda_{12}+\lambda_{13}) p_1(t).$$

При $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнения для $p_1(t)$:

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda_{12} p_2 - (\lambda_{12}+\lambda_{13}) p_1.$$

Аналогично можно составить остальные три уравнения. Получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова с четырьмя неизвестными функциями времени p_1; p_2, p_3, p_4:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_{21} p_2 - (\lambda_{12}+\lambda_{13}) p_1, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{24}+\lambda_{21}) p_2, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{31} p_1 + \lambda_{43} p_4 - \lambda_{32} p_2, \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_{24} p_2 + \lambda_{43} p_4. \end{cases} \qquad (5)$$

При этом любое дифференциальное уравнение системы (5) можно заменить уравнением (4).

Чтобы решить уравнение Колмогорова и найти вероятности состояний, необходимо задать начальные условия. Если точно знать, что в начальный момент система находится в состоянии M_1, то для этого момента $p_1(0)=1$, и тогда все остальные начальные вероятности равны нулю. Теперь полученную систему линейных дифференциальных уравнений можно решить аналитически. В результате решения находим все вероятности состояний как функции времени. Распределение вероятностей показано на рис. 2.

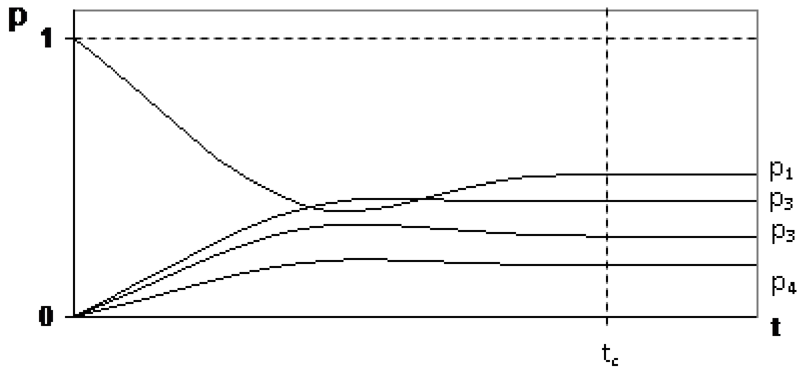


Рисунок 2 – Вероятности состояний M_1, M_2, M_3, M_4 событий

Анализируя график на рис. 2 видно, что при $t \geq t_C$, вероятность состояний транспортного потока не зависит от времени, и принимает постоянные значения.

Если число состояний системы конечно и из каждого из них можно перейти в любое другое, то существуют пределы вероятности состояний при $t \to \infty$, которые не зависят от начального состояния системы (финальные вероятности).

Финальную вероятность состояния M_i рассмотрим как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если система M имеет три состояния M_1, M_2, M_3 и их финальные вероятности равны 0,2; 0,3 и 0,6, то это значит, что в предельном стационарном режиме система в среднем две десятых части времени проводит в состоянии M_1, три десятых – в состоянии M_2 и шесть десятых – в состоянии M_3.

Чтобы найти финальные вероятности, воспользуемся тем, что теперь p_1, p_2, p_3, p_4 – постоянны, т.е. их производные по времени равны нулю. Воспользуемся уравнениями Колмогорова и получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Так как в уравнениях нет свободных членов, неизвестные определим с точностью до произвольного множителя. При этом можно упростить решение системы уравнений, отбросив самое сложное, заменив его уравнением (4).

Рассмотренную выше модель случайных процессов применяют к моделированию систем массового обслуживания (СМО). Под СМО понимают системы, на вход которых подается случайный поток однотипных заявок (событий), который обрабатывается одним или несколькими однотипными каналами. К этим системам можно отнести и обслуживание транспортного потока.

Проектирование систем выполняется с учетом параметров эффективности системы, в качестве которых выступают:

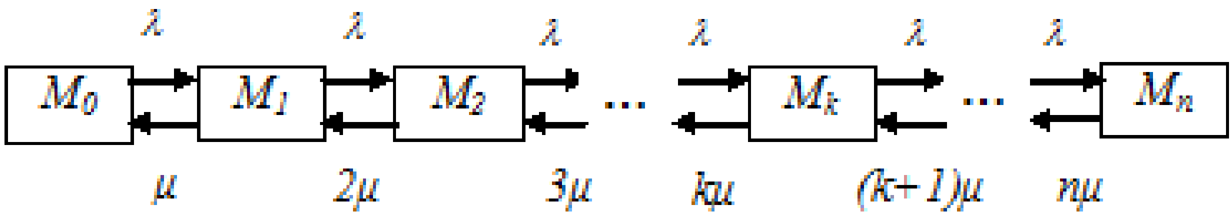
- среднее число заявок (транспортных единиц), которые обслуживаются в единицу времени;
- среднее число занятых каналов;
- средняя длина очереди (транспортного потока);
- среднее время ожидания в очереди транспортных единиц;
- среднее число заявок получивших отказ в обслуживании;
- среднее время обслуживание транспортных единиц и т.д.

Рассмотрим модель n-канальной СМО с отказами. Подобную схему можно применить к транспортному потоку.

Примем следующие предположения:

- все каналы однотипны;
- время обслуживания заявки в канале .случайно и образует простейший поток интенсивностью μ;
- поступающий поток заявок интенсивностью λ будем считать пуассоновским;
- система может иметь $(n + 1)$ состояний: M_0 – все каналы свободны; M_1 – занят один канал; M_2 –заняты два канал и т.д.;
- если все каналы системы заняты, то очередная заявка не будет удовлетворена.

Так как мы предположили, что входной и выходной потоки простейшие, то система может переходить из одного состояния в другое тоже последовательно: из M_0 в M_1; из M_1, в M_0 или в M_2 и т.д. (рис. 3).



Рисунке 3 – Граф состояний M_i

Составим уравнения Колмогорова для финальных вероятностей [5]:

$$M_0: \mu p_1 - \lambda p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$M_1: 2\mu p_2 + \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0,$$

$$M_2: 3\mu p_3 + \lambda p_1 - (\lambda + 2\mu) p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3\mu^3} p_0,$$

$$\ldots$$

$$M_{k-1}: k\mu p_k + \lambda p_{k-2} - (\lambda + (k-1)\mu) p_{k-1} = 0, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0.$$

Введем понятие приведенной интенсивности заявок $\alpha = \lambda / \mu$, характеризующее среднее число поступивших заявок за среднее время обслуживания одной заявки.

Выразим вероятность состояний p_k:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0.$$

Найдем вероятность p_0 из условия $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$:

$$p_0 + \alpha p_0 + \frac{\alpha^2}{2!} p_0 + \frac{\alpha^3}{3!} p_0 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} p_0 = 1,$$

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}.$$

Найдем вероятность отказа, в случае если все каналы системы заняты:

$$P_{ОТК} = p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0.$$

Вероятность обслуживания заявки равна:

$$q = 1 - P_{ОТК} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0 .$$

Среднее число заявок, обслуженных системой в единицу времен, называется абсолютной пропускной способностью (А) и она равна:

$$A = \lambda q .$$

Тогда среднее число загруженных каналов $N_З$ и коэффициент загрузки одного канала $K_З$ выражаются соотношениями

$$N_З = p_1 + 2p_2 + ... + np_n ,$$

$$K_З = \frac{N_З}{n} .$$

Цепи Маркова можно использовать и в других случаях изменения состояния транспортного потока, при выезде транспортной единицы на основную дорогу, выполнение различных маневров разворота, обгона, смены полосы движения и т.д.

Библиографический список

1 Ашихмин, В.Н. Введение в математическое моделирование [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.Н. Ашихнин, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер, О.Б. Наймарк, В.Ю. Столбов, П.В. Трусов, П.Г. Фрик; под. общ. ред. П.В. Трусова М.: Логос, 2005. – 440 с.

2 Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1983 – 208 с.

3 Розанов, Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1989 – 320 с.

4 Сильянов, В.В. Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организация движения [Текст] / В.В. Сильянов. – М.: Транспорт, 1977. – 303 с.

5 Зеликов, В.В. Моделирование транспортных потоков / В.В. Зеликов, С.С. Веневитина, Е.О. Уточкина, О.А. Зеликова // Актуальные направления

научных исследований XXI века: теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции / гл. ред. В.М. Бугаков ; ФГБОУ ВПО «ВГЛТА». – Воронеж, 2014. - № 4, ч. 1 (9-1). – С. 232 – 236.