УДК 517.9:656

ЗАДАЧА О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ АВТОМОБИЛЯ

Веневитина С.С., Зенина В.В., Малыхин В.П.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф.Морозова»

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях автомобиля, происходящих параллельно его плоскости симметрии. Горизонтальные колебания будем считать пренебрежимо малыми.

Упрощенную модель автомобиля в виде стержня на двух пружинах изобразим на рис. 1.

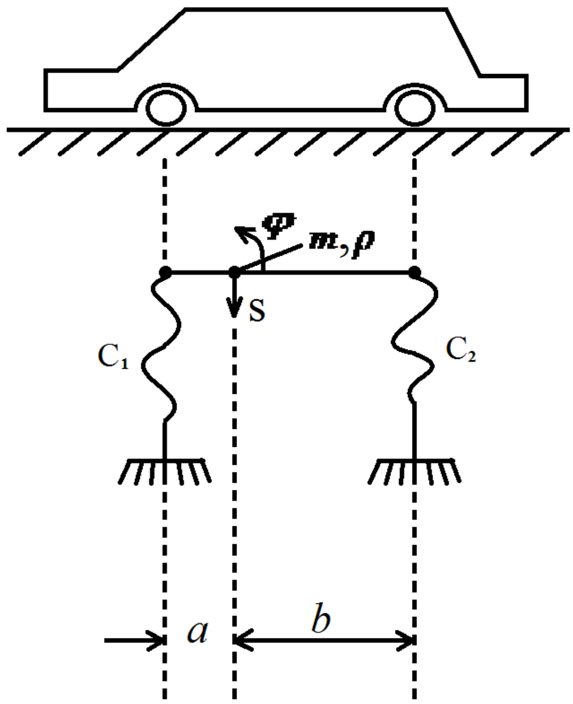

Рисунок 1 – Модель автомобиля

Пусть a и b – расстояния центра тяжести от задней и передней упругих опор соответственно, m – масса кузова, c_1 и c_2 – коэффициенты жесткости задней и передней опор.

Система обладает двумя степенями свободы. За обобщенные координаты, определяющие положение стержня, примем вертикальное перемещение s центра тяжести (ось направлена вниз), и угол поворота φ в радианах вокруг центра тяжести (положительное направление – против часовой стрелки).

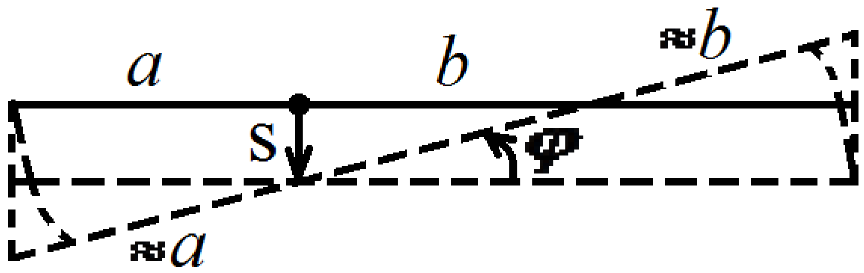

Рисунок 2.

Осадки упругих опор, задней и передней, соответственно равны

$$s + a\sin\varphi,$$

$$s - b\sin\varphi.$$

Так как при малых φ справедливо равенство $\sin\varphi \approx \varphi$ (что следует из первого замечательного предела $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$), то выражения примут вид

$$s + a\varphi,$$

$$s - b\varphi.$$

Кинетическая энергия системы, согласно [1], имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

В нашем случае $v = s'$ (скорость), $\omega = \varphi'$ (угловая скорость), $I = m\rho^2$ (момент инерции кузова относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести, где ρ – радиус инерции). Тогда

$$T = \frac{m(s')^2}{2} + \frac{m\rho^2(\varphi')^2}{2},$$

где первое слагаемое соответствует поступательному движению, а второе – вращательному.

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{c_1(s + a\varphi)^2}{2} + \frac{c_2(s - b\varphi)^2}{2}.$$

Соответствующие уравнения Лагранжа второго рода

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial s'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial s} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial s}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \end{cases}$$

примут вид:

$$\begin{cases} ms'' + (c_1 + c_2)s + (c_1 a - c_2 b)\varphi = 0 \\ m\rho^2\varphi'' + (c_1 a - c_2 b)s + (c_1 a^2 + c_2 b^2)\varphi = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Выясним условия, при которых возможны вертикальные колебания без поворота (подпрыгивание).

Пусть $\varphi = 0$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} ms'' + (c_1 + c_2)s = 0 \\ (c_1 a - c_2 b)s = 0 \end{cases}.$$

Первое уравнение в системе – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$mk^2 + (c_1 + c_2) = 0,$$

$$k^2 = -\frac{c_1 + c_2}{m} < 0,$$

$$k_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

Общим решением уравнения будет функция

$$s = A\cos\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}t,$$

описывающая вертикальные гармонические колебания с частотой $\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$.

Из второго уравнения системы следует, что такое движение возможно, если

$$c_1 a = c_2 b. \qquad (2)$$

Выясним условия, при которых возможны угловые колебания вокруг центра тяжести без подпрыгивания (галопирование).

Пусть $s = 0$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} (c_1 a - c_2 b)\varphi = 0 \\ m\rho^2\varphi'' + (c_1 a^2 + c_2 b^2)\varphi = 0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения этой системы получаем условие (2). А решая второе уравнение, получим

$$\varphi = A\cos\sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m\rho^2}}t + B\sin\sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m\rho^2}}t,$$

т.е. гармонические колебания (вращательные) вокруг центра тяжести с частотой $\sqrt{\dfrac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m\rho^2}}$.

Итак, при условии выполнения равенства (2), движение автомобиля является комбинацией независимых движений подпрыгивания и галопирования, представляющих свободные колебания с частотами $\sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}$ и $\sqrt{\dfrac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m\rho^2}}$ соответственно. Для нахождения амплитуд этих колебаний нужно задать начальные условия, т.е. значения s, s', φ, φ' в момент $t = 0$.

Если на автомобиль будет действовать периодическая внешняя сила, частота которой приближается к одной из двух последних частот, то может возникнуть резонанс. Чтобы уменьшить возможность резонанса, подбирают параметры задачи так, чтобы была только одна частота, т.е. чтобы

$$\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m\rho^2}},$$

или
$$c_1 + c_2 = \frac{1}{\rho^2}(c_1 a^2 + c_2 b^2).$$

Из условия (2) выразим $c_2 = c_1 \cdot \dfrac{a}{b}$ и подставим в предыдущее равенство, получим
$$c_1\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(c_1 a^2 + c_1 \cdot \frac{a}{b} \cdot b^2\right),$$

или
$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{\rho^2}\left(a + b\right).$$

Окончательно получаем

$$\rho^2 = ab. \tag{3}$$

Таким образом, при выполнении условий (2) и (3) имеется одна частота и любое движение есть комбинация независимых галопирования и подпрыгивания.

Исследуем теперь возможность колебания лишь одной из подвесок, например задней. Если передняя подвеска неподвижна, то $s-b\varphi=0$, т.е. $s=b\varphi$.

Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} mb\varphi''+(c_1+c_2)b\varphi+(c_1a-c_2b)\varphi=0, \\ m\rho^2\varphi''+(c_1a-c_2b)b\varphi+(c_1a^2+c_2b^2)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi''+\dfrac{c_1(a+b)}{mb}\varphi=0, \\ \varphi''+\dfrac{c_1a(a+b)}{m\rho^2}\varphi=0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\left[\frac{c_1(a+b)}{mb}-\frac{c_1a(a+b)}{m\rho^2}\right]\varphi=0.$$

Считая, что задняя подвеска перемещается, то есть что $\varphi\neq 0$, получаем $\dfrac{c_1(a+b)}{mb}=\dfrac{c_1a(a+b)}{m\rho^2}$, или $\rho^2=ab$. Вновь получили условие (3). При этом задняя подвеска колеблется с частотой $\sqrt{\dfrac{c_1(a+b)}{mb}}$.

Аналогично проверяется, что при выполнении условия (3) возможны колебания передней подвески с неподвижной задней подвеской с частотой $\sqrt{\dfrac{c_2(a+b)}{ma}}$.

Таким образом, на основе проведенных исследований, можно сделать вывод, что схема автомобиля, для которого выполняются условия (2) и (3) признается особенно рациональной с точки зрения комфортабельности езды.

Библиографический список

1 Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики [Текст] : рек. М-вом образования и науки Рос. Федерации в качестве учеб. / С. М. Тарг. – Изд. 18-е, стер. – М. : Высш. шк., 2008. – 416 с.