УДК 517.968

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. В. Сапронов, В. В. Зенина, Е. О. Уточкина

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова»

Введение

В последние годы исследовано множество типов уравнений с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в банаховых пространствах [1-9]. В работах [10-15] изучалось интегральное уравнение Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в пространстве суммируемых на $[0,\delta]$ функций со значениями а банаховом пространстве E. Данная статья является их продолжением.

1 Постановка задачи. Формулировка основного результата

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_E .$$

В пространстве $Q([0,\delta],E)$ ограниченных измеримых в норме E на $[0,\delta]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{Q([0,\delta],E)} = \sup_{0\le x\le\delta} \|\psi(x)\|_E .$$

Введем семейство банаховых пространств $M_{q,\gamma}^{k,\alpha}$, $q \geq 1$:

$$M_{q,\gamma}^{k,\alpha} = \left\{ \varphi(x) : \varphi^{(i)}(x) = x^{\alpha - qi} e^{\gamma \int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \omega_i(x), \omega_i(x) \in Q([0,\delta], E); \|\varphi\|_{M_{q,\gamma}^{k,\alpha}} = \max_{0 \leq i \leq k} \|\omega_i\|_{Q([0,\delta],E)} \right\}.$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int\limits_0^x K(x,t) u(t) dt = 0, \ (0 \leq x \leq \delta) \qquad (1)$$

в $M_{2,\nu}^{0,-6}$, где $K(x,t)$ – заданная функция со значениями в $L(E)$, имеющая вид

$$K(x,t) = \left[\frac{1}{2} C_2 x^2 - C_2 xt + \frac{1}{2} C_2 t^2 \right] + \left[C_1 x^3 - C_1 x^2 t \right] + \left[3C_0 x^4 - 2C_0 x^3 t \right], \qquad (2)$$

где операторы C_0, C_1, C_2 являются ограниченными в E.

Введем в рассмотрение операторный пучок

$$B_\nu = -\nu C_0 + C_1 - \frac{1}{\nu} C_2. \qquad (3)$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) пучок (3) имеет характеристическое число ν $(\nu < 0)$;

2) характеристическому числу ν соответствует собственный вектор e и цепочка присоединенных к нему векторов $e_1, \ldots, e_n$.

Тогда для уравнения (1) существует решение вида

$$u(x) = \left[\frac{1}{x^2} e^{\nu \int\limits_x^\delta \frac{dz}{z^2}} a_0 + \frac{1}{x^2} e^{\nu \int\limits_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \int\limits_x^\delta \frac{dz}{z^2} a_1 + \ldots + \frac{1}{x^2} e^{\nu \int\limits_x^\delta \frac{dz}{z^2}} \left(\int\limits_x^\delta \frac{dz}{z^2} \right)^n a_n \right]^{(2)}, \qquad (4)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – искомые коэффициенты в E.

2 Построение решения

Пусть $u(x)=\bar{v}^{(2)}(x)$, тогда интегрируя по частям в уравнении (1), получаем

$$C_0 x_4 \bar{v}(x)+\left(C_1 x^2+2C_0 x^3\right)\bar{v}(x)+C_2\int_0^x \bar{v}(x)\,dx=0. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$\bar{v}(x)=\frac{1}{x^2}e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\left[a_0+\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}a_1+\ldots+\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^n a_n\right], \tag{6}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – искомые коэффициенты в E.

Подставляя (6) в (5) и произведя необходимые преобразования, получаем

$$\begin{gathered}
-C_0 v e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\left[a_0+\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)a_1+\ldots+\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^n a_n\right]- \\
-C_0 e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\left[a_1+2\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)a_2+3\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^2 a_3+\ldots+n\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^{n-1} a_n\right]+ \\
+C_1 e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\left[a_0+\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)a_1+\ldots+\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^n a_n\right]- \\
-C_2\left\{\frac{1}{v}e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}a_0+\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{v}e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^p a_p+\sum_{m=p-1}^{0}(-1)^{p-m}\frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)}{v^{p-m+1}}e^{v\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}}\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^m a_p\right]\right\}=0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях $\left(\int_x^\delta \frac{dz}{z^2}\right)^\alpha$, $\alpha=n, n-1, n-2, \ldots, n-k$ $(k=3,\ldots,n)$, получаем систему уравнений

$$\left(-C_0v+C_1-\frac{C_2}{v}\right)a_n=0$$
$$\left(-C_0v+C_1-\frac{C_2}{v}\right)a_{n-1}+\left(-C_0n+\frac{C_2n}{v^2}\right)a_n=0$$
$$\left(-C_0v+C_1-\frac{C_2}{v}\right)a_{n-2}+\left(-C_0\left(n-1\right)+\frac{C_2\left(n-1\right)}{v^2}\right)a_{n-1}-\frac{C_2n\left(n-1\right)}{v^3}a_n=0$$
$$---\qquad(8)$$
$$\left(-C_0v+C_1-\frac{C_2}{v}\right)a_{n-k}+\left(-C_0\left(n-k+1\right)+C_2\frac{\left(n-k+1\right)}{v^2}\right)a_{n-k+1}+$$
$$+\left(-C_2\frac{\left(n-k+2\right)\left(n-k+1\right)}{v^3}\right)a_{n-k+2}+\ldots+\left(\left(-1\right)^{k-z+1}C_2\frac{\left(n-k+z\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)}{v^{k-z+1}}\right)a_{n-k+z}+\ldots+$$
$$+\left(\left(-1\right)^kC_2\frac{\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)}{v^k}\right)a_{n-1}+\left(\left(-1\right)^{k+1}C_2\frac{n\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)}{v^{k+1}}\right)a_n=0.$$

Систему уравнений (8) перепишем в виде

$$B_va_n=0$$
$$B_va_{n-1}+nB'_va_n=0$$
$$B_va_{n-2}+\left(n-1\right)\frac{B'_v}{1!}a_{n-1}+n\left(n-1\right)\frac{B''_v}{2!}a_n=0$$
$$---\qquad(9)$$
$$B_va_{n-k}+\left(n-k+1\right)\frac{B'_v}{1!}a_{n-k+1}+\left(n-k+2\right)\left(n-k+1\right)\frac{B''_v}{2!}a_{n-k+2}+\ldots+$$
$$+\left(n-k+z\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)\frac{B_v^{(k-z)}}{\left(k-z\right)!}a_{n-k+z}+\ldots+$$
$$+\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)\frac{B_v^{(k-1)}}{\left(k-1\right)!}a_{n-1}+n\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)\frac{B_v^k}{k!}a_n=0.$$

Нетрудно по индукции доказать, что решением системы уравнений (9) будет

$$a_n=e,\ a_{n-1}=ne_1,\ldots,\ a_{n-k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}e_k\quad\left(k=2,\ldots,n\right)$$

Следовательно, $\overline{v}\left(x\right)$, определяемая формулой (6), будет решением уравнения (5), а $u\left(x\right)$ вида (4) будет решением интегрального уравнения (1).

Библиографический список

1 Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. 1977. № 235 (4) С. 772-774.

2 Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. 1978. № 240 (2) С. 268-271.

3 Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. № 19 (4) С. 970-988.

4 Крейн, С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Докл. РАН. 1997. № 355 (4) С. 450-452.

5 Крейн, С. Г. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // УМН. 1995. № 50 (4) С. 140.

6 Krein, S. G. Singular integral Volterra equations / S. G. Krein // Abstracts of Internat. Congress of Math. 1994. С. 125.

7 Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equations with regular singularity / S. G. Krein, I. V. Sapronov // Укр. матем. журн. 1997. № 49 (3) С. 424-432.

8 Сапронов, И. В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2004. № 6 С. 48-58.

9 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2005. № 2 С. 81-83.

10 Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11 С. 45-55.

11 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Изв. вузов. Математика. 2011. № 1 С. 59-71.

12 Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра 1 рода с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов, С. С. Веневитина, В. В. Зенина // ВЗМШ, Научная книга. 2014 С. 290-295.

13 Сапронов, И. В. Интегральное уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Воронежский научно-технический вестник, ВГЛТА № 2 (8). 2014 С. 86-91.

14 Сапронов, И. В. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода в банаховом пространстве / И. В. Сапронов, П. Н. Зюкин, В. В. Зенина // Воронежский научно-технический вестник, ВГЛТА № 3 (9). 2014 С. 9-18.

15 Сапронов, И. В. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода в банаховом пространстве / И. В. Сапронов, П. Н. Зюкин, В. В. Зенина // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Материалы международной открытой конференции «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». – Воронеж: ВГЛТА. Выпуск 4-1 (9-1), том 2. 2014 – с. 113-114.