УДК 539. 3.6

РАСЧЕТ УПРУГОЙ БАЛКИ НА ПОЛНУЮ ПРОЧНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков, К. Б. Просветов, И. Д. Гаврилов
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассмотрим задачу о потери устойчивости упругой балки в условиях сжато-изогнутого деформирования под действием сжимающей силы p [1]. Дифференциальное уравнение изгиба сжато-изогнутой балки имеет следующий вид:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\pm M(\mathrm{x});\qquad EI=const; \tag{1}$$

Для шарнирно-закрепленной балки:

$$M=-p\cdot y; \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2\cdot y=0; \tag{3}$$

$$k^2=\frac{p}{EI}. \tag{4}$$

Решение дифференциального уравнения (3) имеет такой вид:

$$y(\mathrm{x})=A\sin kx; \tag{5}$$

$$M(\mathrm{x})=-pA\sin kx;\qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x})=\frac{dy}{dx}=-pAk\cos kx. \tag{6}$$

Будем полагать, что A > 0 и $I_{\min}=\frac{bh^3}{12}$ (балка с прямолинейным поперечным сечением). Будем считать, что длина балки l удовлетворяет следующему неравенству:

$$kl\leq=\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

В этом случае будем иметь:

$$\cos k\,l > 0; \qquad \sin k\,l > 0. \tag{8}$$

Для выполнения условия полной прочности мы будем иметь следующую картину для третьей теории прочности (рис. 1).

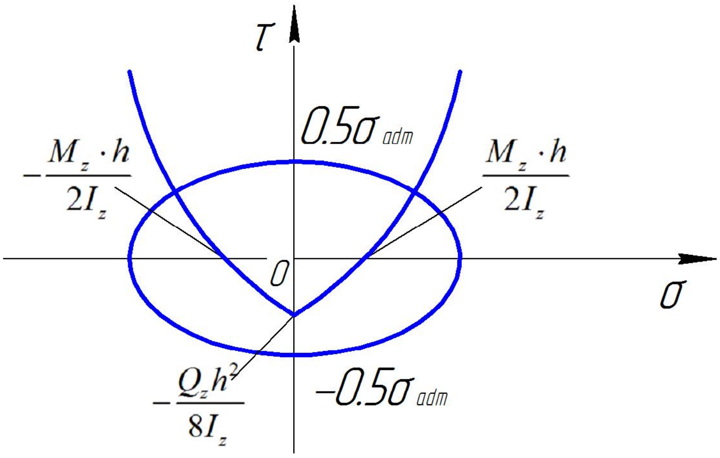

Рисунок 1 – Расчет балки на полную прочность с использованием геометрической картины

Для балки прямолинейного поперечного сечения [1]:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_{z\min}}\mathrm{y}; \qquad \tau = \frac{Q_z}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - \mathrm{y}^2\right). \tag{9}$$

$$I_{z\min} = \frac{b\,\mathrm{h}^3}{12}. \tag{10}$$

Нижняя точка параболы напряжений принимает следующее значение:

$$-\frac{Q_z h^2}{8I_{z\min}}. \tag{11}$$

Посчитаем величину функции (11):

$$-\frac{Q_z h^2}{8I_{z\min}} = -\frac{3pAk\cos kx}{2bh}. \tag{12}$$

Функция (12) имеет максимальное значение по модулю в сечении с координатой $x = 0$:

$$\max\left|\frac{-Q_z h^2}{8I_{z\min}}\right| = \frac{3\sqrt{3}Ap^{3/2}}{bh^2\sqrt{bhE}}. \qquad (13)$$

Для того чтобы парабола напряжений была внутри эллипса прочности, достаточно выполнить следующее неравенство:

$$\frac{3\sqrt{3}Ap^{3/2}}{bh^2\sqrt{bhE}} \le 0,5\sigma_{adm}. \qquad (14)$$

Из соотношения (14) будем иметь:

$$p^{3/2} \le \frac{0,5bh^2\sqrt{bhE}\sigma_{adm}}{3\sqrt{3}A}. \qquad (15)$$

Отсюда получим следующую оценку для критической сжимающей силы p, при которой будет выполняться условие полной прочности упругой балки по третьей теории прочности

$$p_{кр} \le \left\{\frac{0,5bh^2\sqrt{bhE}\sigma_{adm}}{3\sqrt{3}A}\right\}^{2/3}. \qquad (16)$$

Библиографический список

1 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

2 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : Учеб. для вузов. / В. И. Феодосьев – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э.Баумана, 1999. – 592 с.

3 Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] : Н. М. Беляев – 14-е издание. – М. : Изд-во "Наука", 1965. – 856 с.