УДК 624.014.2

# УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В БАЛОЧНЫХ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

А. А. Свентиков, С. К. Попиков
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
e-mail: popikovpetr@yandex.ru

**Введение**

На протяжении многих лет одними из самых распространенных конструктивных элементов в строительстве являются стальные тонкостенные конструкции в виде двутавровых и тавровых балок. Ввиду распространенности данных элементов встает вопрос о максимальном использовании их несущей способности, что в свою очередь на прямую связано с экономией металла. Уменьшение металлоемкости возможно за счет совершенствования методики расчета, в результате чего возможно получение ряда параметров, наиболее точно отражающих напряженно-деформированное состояние балки, а также оптимизации геометрической формы конструктивного элемента.

**Актуальность**

Целями инженерных расчетов объектов строительства является предупреждение предельных состояний и создание конструкций, удовлетворяющих требованию разумного сочетания надежности и экономичности.

О общем случае, технический расчет, как правило, включает в себя следующие этапы:

1 Инженерная схематизация, то есть формирование расчетной схемы, которая в дальнейшем будет использоваться для численного анализа проектируемого или обследуемого объекта.

2 Математическая обработка расчетной схемы, реализация расчетных алгоритмов, в которых исходными данными являются информация о геометрических размерах, силовых воздействиях, свойствах строительных материалов. В результате расчета определяются параметры, описывающие "нагрузочные эффекты" (усилия, напряжения, деформации, перемещения).

3 Анализ результатов расчета. На данном этапе происходит возвращение от расчетной схемы к реальной конструкции и сравнение "нагрузочных эффектов" с их предельными значениями. Принимается решение о завершении расчетов или необходимости их продолжения путем частичного (или полного) повторения с измененными исходными данными [8].

**Цель данного исследования** – повышение эффективности использования несущей способности балочных конструкций за счет получения параметров напряженно-деформированного состояния с учетом физической нелинейности, то есть отклонений от закона Гука.

**Основные задачи**, решаемые для достижения поставленной цели, были определены в соответствии с изложенными выше этапами технического расчета:

1 На основе анализа исследуемого конструктивного элемента выбрать расчетную схему для дальнейшего исследования, которая отражает наиболее существенные особенности реальной конструкции и соответствует механизмам разрушения и деформирования.

2 На основе метода конечных элементов разработать обобщенный алгоритм расчета выбранной (и подобных) расчетной схемы как в упругой постановке задачи, так и с учетом физической нелинейности.

3 Произвести сравнительный анализ полученных результатов (упругий расчет – упругопластический расчет – расчет по действующим нормативным документам).

4 Произвести ряд расчетов различных балочных конструкций с целью исследования их работы под действием внешних нагрузок с учетом физической нелинейности материала и оценки их надежности.

**Обзор методов исследования**

Согласно ГОСТ 27751-2014 "Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения" расчет и оценку надежности объектов строительства следует производить по методу предельных состояний.

Предельное состояние строительного объекта – это состояние строительного объекта, при превышении которого его эксплуатация недопустима, затруднена или нецелесообразна [4].

Для конструкций из мягкой стали, определение несущей способности должно выполняться с учетом пластических свойств материала. Следовательно, при расчете должна быть использована физическая модель пластического тела. Так в новых американских нормах, в проекте Eurocode и СП 13.13330.2011 "Стальные конструкции" для сечений определенного класса в предельном состоянии допускается возможность образования пластического шарнира, то есть текучести по всей высоте сечения элемента. В тоже время нормальная эксплуатация многих сооружений может быть достигнута лишь тогда, когда будут учтены условия жесткости, то есть перемещения точек конструкции будут невелики, а остаточные деформации будут отсутствовать. В действующих отечественных строительных нормах расчет сечений металлических элементов предполагает возможность возникновения ограниченных пластических деформаций, учет которых происходит за счет введения в формулы для проверки прочности сечения помимо коэффициентов надежности (по материалу, ответственности, нагрузкам) и условий работы дополнительных коэффициентов, учитывающих ограниченное развитие пластических деформаций [6]. Поэтому при современном проектировании и научных исследованиях, в области строительства, растет востребованность нелинейных методов расчета на математической основе МКЭ.

При сравнении с упрошенными методами расчета по предельным состояниям, которые предлагают строительные нормы, методы, учитывающие отклонения от закона Гука либо от принципа малости или непрерывности перемещений, обладают рядом преимуществ:

1 Нет необходимости прибегать к ограничению действующих нагрузок для обеспечения корректности способа определения расчетных напряжений и деформаций.

2 Отпадает потребность в использовании коэффициентов, косвенно учитывающих физическую нелинейность материала или повышение несущей способности за счет ограниченного развития пластических областей.

3 Можно получить во всех точках физически возможное напряженное состояние, которое может быть допредельным либо предельным (включая образование пластических шарниров в статически неопределимых системах) с определяемым расчетом границами соответствующих подобластей.

В данном исследовании стальная балочная конструкция рассматривается как идеальное упругопластическое тело: ее деформирование описывается билинейной диаграммой Прандтеля, а упрочнение отсутствует.

Как известно, диаграмма Прандтеля состоит из двух участков. Первый участок отвечает линейно-упругой работе материала, второй, горизонтальный, соответствует условию идеальной пластичности, когда при постоянных напряжениях деформации, отвечающие пределу текучести неограниченно растут [2, 7].

Положение точка перехода от линейно-упругого деформирования к жесткопластическому определяется в соответствии с одним из уравнений теории пластичности.

В данном исследовании используется уравнений текучести Треска-Сен-Венана. [5]

На основании опытных данных Треска установил, что для начала пластической деформации максимальное касательное напряжение должно достигнуть определенной, постоянной для данного металла величины. Сен-Венан, в свою очередь, на основании этих опытов вывел условие пластичности: пластическая деформация наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение $\tau_{max}$ достигает величины, равной половине предела текучести стали $\sigma_s$.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_s}{2} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \quad (1)$$

где $\sigma_1$, $\sigma_3$ – главные нормальные напряжения.

Таким образом, пластическая деформация наступает тогда, когда максимальная разность главных нормальных напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_3$ по своей абсолютной величине достигает величины предела текучести:

$$\sigma_s = |\sigma_1 - \sigma_3|. \quad (2)$$

При описании вектора относительных деформаций на горизонтальном участке диаграммы Прандтеля согласно теории пластического течения считается, что физический закон пластичности связывает напряжения и приращения напряжений с приращениями деформаций или скоростями деформации.

Иными словами, связывает поле приращений пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ с частными производными некоторой функции $f = 0$, называемой пластическим потенциалом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

где $\lambda$ – неопределённый положительный коэффициент пропорциональности.

Если в качестве пластического потенциала принять уравнение текучести материала, то выше приведенное соотношение будет выражать ассоциированный закон течения [8].

При подстановке условия текучести Треска-Сен-Венана $f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s = 0$ в выражение для скорости пластических деформации (3):

$$\dot{\varepsilon}_1 = \lambda,$$
$$\dot{\varepsilon}_2 = 0, \quad (4)$$
$$\dot{\varepsilon}_3 = -\lambda.$$

Полученные уравнения показывают, что пластическая деформация при условии текучести Треска-Сен-Венана и ассоциированном законе течения представляет собою чистый сдвиг при постоянном объеме в плоскости главных осей 1 и 3. В направлении среднего по величине главного напряжения $\sigma_2$, никакой пластической деформации не происходит. Величина указанного сдвига произвольна, скорости $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_2$, равны по величине и противоположны по знаку [5].

Решение нелинейных задач с использованием метода конечных элементов складывается из процедурной основы (известного математического процесса) и ее содержательного наполнения: физических уравнений или соотношений.

Основные физические уравнения и соотношения, используемые в данном исследовании приведены выше. Что касается процедурной основы, то в современных программных комплексах при решении физически нелинейных задач используется метод упругих решений. Этот метод представляет собой применительно к методу конечных элементов решение повторяющихся последовательностей систем линейных уравнений.

На каждой ступени итерационного процесса вычисления выполняются в следующей последовательности:

1 Выявляется пластическая подобласть, в которой нагрузки, полученные на предыдущей ступени расчета, превышают предел текучести.

2 На пластическую подобласть накладываются силы, переводящие ее в физически возможное напряженное состояние.

3 Определяется "невязка силы".

4 "Невязка силы" устраняется путем прикладывания в тех же точках уже ко всей расчетной области сил равных "невязке", но с противоположным знаком.

Существует несколько версий метода упругих решения, однако, в данном исследовании применяется метод начальных напряжений.

Данный метод может быть реализован следующими способами:

1 Неуравновешенные силы на i-той и ранее пройденных ступенях итерации складываются с начальной нагрузкой. В этом случае общее матричное соотношение метода конечных элементов имеет вид:

$$\{U_i\} = [K_0]^{-1}\{F_i\}, \tag{5}$$

где $\{U_i\}$, $\{F_i\}$ – узловые перемещения и узловые силы после i-той ступени итерации, $[K_0]$ – начальная матрица жесткости системы, которая не меняется в процессе расчета.

Расчет ведется до тех пор, пока перемещения $\{U_i\}$ не перестанут изменяться.

2 На каждой i-той ступени итерации расчет ведется только на "дополнительные" силы $\{\Delta F_i\}$ в соответствии с матричным соотношением:

$$\{\Delta U_i\} = [K_0]^{-1}\{-\Delta F_i\}. \tag{6}$$

Получаемые при этом векторы $\{\Delta U_i\}$ накапливаются и складываются с начальными перемещениями упругого расчета. Расчет ведется до тех пор, пока значения $\{\Delta U_i\}$ или $\{-\Delta F_i\}$ не станут близкими к нулю. Параметры $\{\Delta U_i\}$ или $\{-\Delta F_i\}$ удобно использовать в качестве меры невязки [1, 3, 8].

Главными достоинствами метода упругих решений являются ясность физического содержания и постоянство в процессе расчета начальной "упругой" матрицы жесткости системы.

**Выводы и перспективы дальнейших исследований**

На основе выше изложенных математического процесса и физических соотношений с использованием метода конечных элементов разработан алгоритм, позволяющий производить расчет тонкостенных стальных конструкций. С помощью данного алгоритма можно получить деформации и главные напряжения в каждом конечном элементе как в упругой, так и в упругопластической постановке задачи. Конструкция при этом может аппроксимироваться на плоскости с помощью различных комбинаций стержневых (по три степени свободы в каждом узле: два перемещения и поворот) и треугольных конечных элементов (по две степени свободы в каждом узле: по два перемещения). Так, например, возможно моделирование двутавровой балки, у которой верхний и нижний пояс задаются стержневыми конечными элементами, а стенка треугольными. С помощью данного алгоритма планируется произвести ряд расчетов различных балочных конструкций с целью исследования их работы под действием внешних нагрузок с учетом физической нелинейности материала и оценки их надежности.

Библиографический список

1 Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А. С. Алексеева и др. ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.

2 Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н. И. Безухов. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.

3 Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика : Учебник. 12-е изд., стер. – СПб. : Издательство "Лань", 2010. – 656 с.

4 ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – М. : Стандартинформ, 2015. – 13 с.

5 Работнов. Сопротивление материалов – М. : Физматгиз, 1963. – 456 с.

6 Свод правил СП 13.13330.2011 Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81* – М. : ОАО ЦПП, 2011 – 171 с.

7 Чарис А. А. Строительная механика. Теория и алгоритмы. – М. : Стройиздат, 1989. – 255 с.

8 Шапиро, Д. М. Метод конечных элементов в строительном проектировании [Текст] : монография / Д. М. Шапиро. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2013. – 181 с.