

УДК 539. 3/6

СПОСОБ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ УПРУГОЙ БАЛКИ ИЗ  
ДРЕВЕСНОГО МАТЕРИАЛА

А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков  
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»  
E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассматривается задача поперечного изгиба упругой балки из древесного материала с круглым поперечным сечением.

Нормальное касательное напряжение в поперечном сечении круглого бруса радиуса  $R$  в точке с координатой  $y$  находятся по следующим формулам [1, 2].

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{4M_z y}{\pi R^4}. \quad (1)$$

$$\tau = \frac{4Q_z}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right), \quad I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi(2R)^4}{64}; \quad (2)$$

Исключим ординату  $y$  из соотношений (1) и (2):

$$\tau + \frac{\pi Q_z R^4}{12M_z^2} \sigma^2 = \frac{4Q_z}{3\pi R^2}. \quad (3)$$

Третья и четвертая теории прочности для упругого материала имеют следующий вид [1, 3, 4].

$$\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} \leq \sigma_{adm}; \quad \sqrt{(\sigma^2 + 3\tau^2)} \leq \sigma_{adm}; \quad (4)$$

где  $\sigma_{adm}$  – заданное допустимое напряжение.

Преобразуем формулы (4):

$$\sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_{adm}^2; \quad \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_{adm}^2; \quad (5)$$

Приведем соотношения (5) к нормальному виду:

$$\left(\frac{\sigma}{1}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{0.5}\right)^2 = \sigma_{adm}^2; \quad \left(\frac{\sigma}{1}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = \sigma_{adm}^2; \quad (6)$$

Соотношения (6) в случае предельного равенства представляют собой уравнения эллипсов, а соотношение (3) уравнение параболы в осях  $(\tau, \sigma)$  (рис. 1).

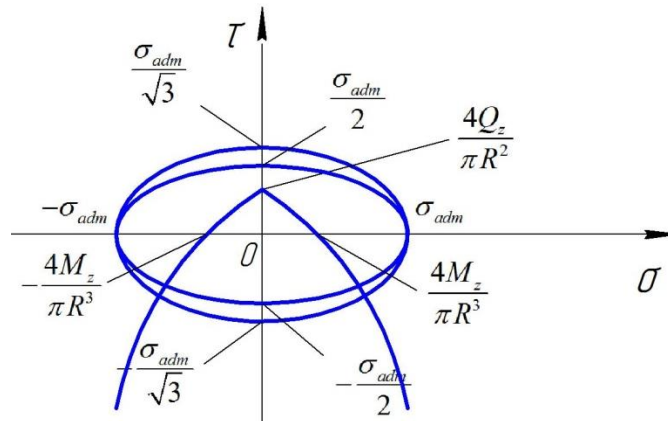


Рисунок 1 – Графики эллипсов и параболы

Из этого рисунка видно, что если точки параболы находятся внутри эллипсов, то условия полной прочности по третьей и четвертой теориям выполняются. Если дуга параболы находится вне эллипсов прочности, то задача расчета на прочность упругой балки требует дополнительного рассмотрения.

Геометрическая схема прочности (рис. 1) допуска выполняется во всех сечениях балки длиной  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ). В качестве примера рассмотрим задачу расчета на полную прочность дубовой балки круглого поперечного сечения, закрепленной на правом конце и нагруженной сосредоточенной силой  $p$  на левом конце (рис. 2).

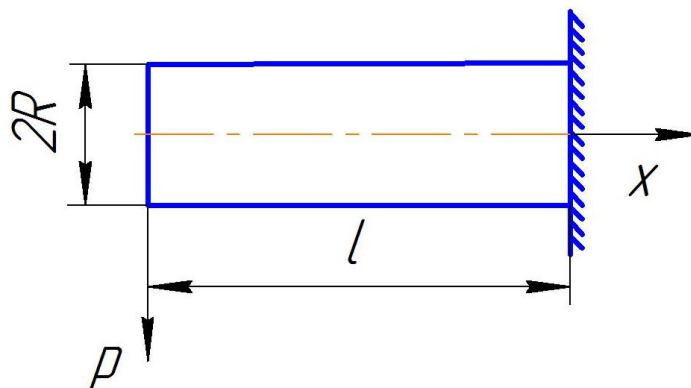


Рисунок 2 – Дубовая балка круглого поперечного сечения

$$Q_z(x) = p; \quad M_z(x) = -px. \quad (7)$$

Имеем следующие данные:

$$p = 200 \text{ Н}, \quad l = 1,5 \text{ м}, \quad R = 0,032 \text{ м}, \quad \sigma_{adm} = 1300 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2.$$

Подсчитаем следующие величины:

$$\frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}} = 747,12 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2; \quad \frac{\sigma_{adm}}{2} = 650 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2;$$

$$\frac{4Q_z}{\pi R^2} = 24,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2; \quad \frac{4M_z}{\pi R^3} = 11,6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

Геометрическая схема прочности имеет следующий вид (рис. 3)

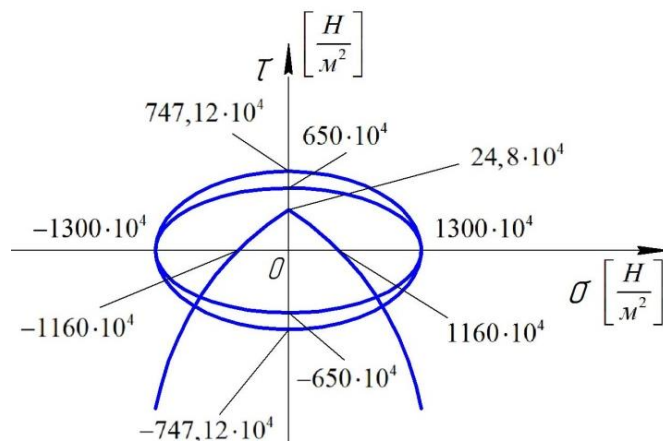


Рисунок 3 – Геометрическая схема прочности

Таким образом, дубовая балка удовлетворяет условиям полной прочности. Приведем сравнение рассмотренного расчета для древесины сосны, у которой  $\sigma_{adm} = 1000 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$ . В этом случае имеем:

$$\frac{4M_z}{\pi R^3} = 1160 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 > \sigma_{adm} = 1000 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2. \quad (8)$$

Для сосновой балки условие полной прочности не выполняется. Из уравнения параболы (3) следует, что если  $Q_z > 0$ , то дуги параболы будут направлены вниз; если  $Q_z < 0$ , то дуги параболы будут направлены вверх.

Вывод:

1 В статье представлен способ расчета на полную прочность балки из упругого древесного материала с использованием геометрической схемы прочности. Данный способ позволяет избежать сложной процедуры построения исследования на экстремум октаэдрического напряжения как функции двух переменных  $y$  и  $x$ .

2 Из геометрической схемы прочности (рис. 1) следует, что если величина радиуса  $R$  увеличивается, то прочность балки увеличивается (точки параболы стремятся к центру координат). Если величины  $Q_z$ ,  $M_z$  и  $l$  увеличиваются, то прочность балки снижается, что соответствует физическому смыслу.

3 Данный способ может быть обобщен на полый стержень, на стержень конического профиля (ветви деревьев) и на случай балки переменной жесткости.

#### Библиографический список

1 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 676 с.

2 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

3 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

4 Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами [Текст] : учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с.