

УДК 539. 3/6

РАСЧЕТ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОГО
ЦИЛИНДРА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

В. Б. Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассматривается задача плоской деформации равномерно вращающегося упругого цилиндра из несжимаемого материала:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 = 0; \quad (1)$$

$$r \frac{dE_\theta}{dr} + E_\theta - E_r = 0; \quad E_\theta = \frac{u}{r}; \quad E_r = \frac{du}{dr}; \quad (2)$$

$$E_r = \frac{(1+\mu)}{E} [(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta]; \quad E_\theta = \frac{(1+\mu)}{E} [(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r]. \quad (3)$$

$$E_r + E_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta); \quad E_r - E_\theta = \frac{(1+\mu)}{E} (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (4)$$

Для несжимаемого материала при $\mu = 0.5$

$$E_r + E_\theta = 0; \quad E_r - E_\theta = \frac{3}{2E} (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (5)$$

$$r \frac{dE_\theta}{dr} + 2E_\theta = 0; \quad \frac{d}{dr} (r^2 E_\theta) = 0. \quad E_\theta = \frac{C_1}{r^2}; \quad E_r = -\frac{C_1}{r^2}; \quad (6)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2E}{3} (E_r - E_\theta) = -\frac{4C_1}{3r^2}. \quad (7)$$

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{4C_1 E}{3r^2} - \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2; \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{4C_1 E}{3r^3} - \frac{\gamma\omega^2}{g} r; \quad (8)$$

$$\sigma_r = -\frac{2C_1 E}{3r^2} - \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 + C_2; \quad \sigma_\theta = \frac{2C_1 E}{3r^2} - \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 + C_2. \quad (9)$$

Для полого цилиндра имеем граничные условия:

$$\sigma_r(r=r_1) = 0; \quad \sigma_r(r=r_2) = 0; \quad (10)$$

$$-\frac{2C_1E}{3r_1^2} + C_2 - \frac{\gamma\omega^2}{2g} r_1^2 = 0; \quad -\frac{2C_1E}{3r_2^2} + C_2 - \frac{\gamma\omega^2}{2g} r_2^2 = 0. \quad (11)$$

$$C_1 = \frac{3\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{4Eg}; \quad C_2 = \frac{\gamma\omega^2}{2g} (r_1^2 + r_2^2). \quad (12)$$

Приведем решение данной задачи в перемещениях в соответствии с учебником [1].

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)E_r + \mu E_\theta]; \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)E_\theta + \mu E_r]; \quad (14)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [\mu(E_\theta + E_r)]; \quad (15)$$

Подставим напряжения (13) и (14) в уравнение равновесия (1):

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)\gamma\omega^2}{E(1-\mu)g} r; \quad (16)$$

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r} + Dr^3. \quad (17)$$

$$D = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)\gamma\omega^2}{8Eg(1-\mu)}. \quad (18)$$

Рассмотрим условия несжимаемости:

$$E_r + E_\theta = 0. \quad 2A - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\gamma\omega^2}{2Eg(1-\mu)} r^2 = 0. \quad (19)$$

Для несжимаемого материала при $\mu = 0,5$. $2A = 0$; $A = 0$.

$$\sigma_r = -\frac{E(1-2\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{B}{r^2} - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(3-2\mu)}{8(1-\mu)(1+\mu)(1-2\mu)g} \gamma\omega^2 r^2; \quad (20)$$

Из граничных условий (10) получим:

$$-\frac{E(1-2\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{B}{r_1^2} - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(3-2\mu)}{8(1-\mu)(1+\mu)(1-2\mu)g} \gamma \omega^2 r_1^2 = 0. \quad (21)$$

$$-\frac{E(1-2\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{B}{r_2^2} - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(3-2\mu)}{8(1-\mu)(1+\mu)(1-2\mu)g} \gamma \omega^2 r_2^2 = 0. \quad (22)$$

Соотношения (21) и (22) представляют собой соотношения неопределенности типа $\frac{0}{0}$ при $\mu \rightarrow 0.5$.

Введем следующую величину $\lambda = 1 - 2\mu$.

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}; \quad 1 + \mu = \frac{3}{2} - \frac{\lambda}{2}; \quad 1 - \mu = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}; \quad 3 - 2\mu = \lambda + 2. \quad (23)$$

$$\frac{(1-2\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} = -\frac{2\lambda}{(3\lambda - \lambda^2)}. \quad (24)$$

$$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)(3-2\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\lambda(3-\lambda)(\lambda+2)}{\lambda(3-\lambda)(1+\lambda)}. \quad (25)$$

При $\mu \rightarrow 0.5$ величина λ стремится к нулю. При раскрытии неопределенностей (24) и (25) используем правило Лопиталья:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda}{(3\lambda - \lambda^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2}{(3 - 2\lambda)} = \frac{2}{3}. \quad (26)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda(3-\lambda)(\lambda+2)}{\lambda(3-\lambda)(1+\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2(6+2\lambda-3\lambda^2)}{(3+4\lambda-3\lambda^2)} = 4. \quad (27)$$

Соотношения (21) и (22) для несжимаемого материала при $\mu \rightarrow 0.5$ примут следующий вид:

$$-\frac{2EB}{3r_1^2} - \frac{\gamma \omega^2}{2g} \gamma \omega^2 r_1^2 = 0. \quad (28)$$

$$-\frac{2EB}{3r_2^2} - \frac{\gamma \omega^2}{2g} \gamma \omega^2 r_2^2 = 0. \quad (29)$$

Однозначное значение константы В получить из соотношений (28)-(29) невозможно, поскольку $r_1 \neq r_2$. Таким образом, решение данной задачи в перемеще-

ниях с использованием закона Гука (13)-(15) нежелательно, ввиду равенства нулю константы А.

Для нахождения однозначного значения радиального перемещения $u(r)$ следует использовать такую формулу [2, 3, 4]:

$$u(r) = \frac{1}{2} \left[r E_{\theta} + \int E_r dr \right]; \quad (30)$$

$$E_{\theta} = \frac{u}{r} = \frac{E_{\theta}}{2} + \frac{1}{2r} \int E_r dr; \quad E_{\theta} = \frac{1}{r} \int E_r dr; \quad (31)$$

$$E_r = \frac{du}{dr} = \frac{E_{\theta}}{2} + \frac{r}{2} \frac{dE_{\theta}}{dr} + \frac{E_r}{2}; \quad E_r = E_{\theta} + \frac{rdE_{\theta}}{dr}. \quad (32)$$

Из уравнения совместимости (2) имеем:

$$\frac{d}{dr} (rE_{\theta}) - E_r = 0; \quad \frac{rdE_{\theta}}{dr} + E_{\theta} - E_r = 0; \quad E_{\theta} = \frac{1}{r} \int E_r dr; \quad (33)$$

Соотношения (33) совпадают с формулами (31) и (32). Из соотношений (6) следует:

$$u(r) = \frac{C_1}{r}. \quad (34)$$

Подставим формулы (6) в соотношение (30)

$$u(r) = \frac{1}{2} \left[r \frac{C_1}{r^2} - \int \frac{C_1}{r^2} \right] = \frac{C_1}{r}. \quad (35)$$

Библиографический список

- 1 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.
- 2 Варданян, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М., 1995. – 568 с.
- 3 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М., 1999. – 592 с.
- 4 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М., 2005. – 544 с.