настройке или ремонту.

Таким образом, предложенная концепция стенда обеспечивает диагностирование и ремонт беспилотных автомобилей, и может быть использована на будущих станциях технического обслуживания, основу производственно-технической базы которых необходимо закладывать на современном этапе.

Библиографический список

1 Нагайцев, М. В. Беспилотные автомобили – этапы разработки и испытаний [Текст] / М. В. Нагайцев, А. М. Сайкин, Д. В. Ендачев // Безопасность на дорогах. – М. : 2012. Вып. 5. – С. 32-39.

2 Маков, П. В. Тенденции развития автономных систем управления автомобилем без участия водителя [Электронный ресурс] // Режим доступа : http://www.mmf.spbstu.ru/mese/2014/156.pdf – Загл. с экрана.

3 Гридин, В. Н. Адаптивные системы технического зрения [Текст] / В. Н. Гриндин, В. С. Титов, М. И. Труфанов. – М. : Наука, 2009. – 434 с.

УДК 539. 3/.6

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассматривается задача обобщенной плоской деформации изогнутого упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии. Система основных уравнений имеет вид:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0; \qquad (1)$$

$$r\frac{dE_\theta}{dr}+E_\theta-E_r=0; \qquad (2)$$

$$E_r = \frac{du}{dr}; \;\; E_\theta = \frac{u}{r}; \tag{3}$$

$$E_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)\right] + \lambda\,\mathrm{T}; \tag{4}$$

$$E_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)\right] + \lambda\,\mathrm{T}; \tag{5}$$

$$E_z = const = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] + \lambda\,\mathrm{T}; \tag{6}$$

$$\sigma_r(\mathrm{r} = \mathrm{r}_1) = 0; \qquad \sigma_r(\mathrm{r} = \mathrm{r}_2) = 0; \tag{7}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\,\mathrm{E}_r + \mu E_\theta + \mu E_z - (1+\mu)\lambda\,\mathrm{T}\right]; \tag{8}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\,\mathrm{E}_\theta + \mu E_r + \mu E_z - (1+\mu)\lambda\,\mathrm{T}\right]; \tag{9}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\,\mathrm{E}_z + \mu E_r + \mu E_\theta - (1+\mu)\lambda\,\mathrm{T}\right]; \tag{10}$$

В этих формулах: σ_r, σ_θ, σ_z – соответственно радиальное, тангенциальное и осевое напряжения; E_r, E_θ, E_z – соответствующие деформации; $T(r)$ – заданный тепловой поток; α – коэффициент теплопроводности; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

В учебной литературе [1, 2, 3, 4, 5] приводится следующее решение данной задачи:

$$u(\mathrm{r}) = \frac{1}{r}\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}\int_{r_1}^{r} \lambda\,\mathrm{T}\, r dr + Ar + \frac{\beta}{r}, \tag{11}$$

где r_1 и r_2 – соответственно внутренний и внешний радиус цилиндра.

Рассмотрим частично случай несжимаемого материала (μ = 0,5). Найдем деформации E_r и E_θ по формуле (11):

$$E_r + E_\theta + E_z = 3\alpha T. \tag{12}$$

$$E_\theta = \frac{u}{r} = \frac{3}{r^2}\int_{r_1}^{r} \lambda\, \mathrm{T}\, r dr + A + \frac{\beta}{r^2}; \tag{13}$$

$$E_r = \frac{du}{dr} = -\frac{3}{r^2}\int_{r_1}^{r} \lambda\, \mathrm{T}\, r dr + A + \frac{\beta}{r^2} + 3\lambda\, \mathrm{T}; \tag{14}$$

Подставим формулы (13) и (14) в соотношение (12):

$$2\mathrm{A} + E_z + 3\ \alpha \mathrm{T} = 3\alpha \mathrm{T}; \qquad \mathrm{A} + \frac{\mathrm{E}_z}{2} = 0. \tag{15}$$

В учебниках [1, 3] дано следующее выражение для напряженности σ_r:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)}\left[\frac{-(1+\mu)}{(1-\mu)}\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} \lambda\, \mathrm{T}\, r dr - \frac{\beta}{r^2} + \frac{(\mathrm{A} + \mu\, \mathrm{E}_z)}{(1-2\mu)}\right]. \tag{16}$$

Для несжимаемого материала

$$\sigma_r = \frac{2E}{3}\left[\frac{-3}{r^2}\int_{r_1}^{r} \lambda\, \mathrm{T}\, r dr - \frac{\beta}{r^2} + \frac{(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{E}_z}{2})}{(1-\frac{2}{2})}\right]. \tag{17}$$

В соответствии с соотношение (15) мы имеем в формуле (17) неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Если считать это выражение равным нулю, то в соответствии с граничными условиями (7):

$$-\frac{3}{r_1^2}\int_{r_1}^{r_1} \lambda\, \mathrm{T}\, r dr = \frac{\beta}{r_1^2} = 0. \tag{18}$$

$$-\frac{3}{r_2^2}\int_{r_1}^{r_2} \lambda\, \mathrm{T}\, r dr = 0. \tag{19}$$

Соотношение (19) не соответствует физическому смыслу, поскольку функция $T(r)$ может иметь произвольное выражение. Отметим, что при неоднородном материале при $E = E(T)$ явное выражение для перемещения $u(r)$ очень сложно получить, а напряжения, выраженные по закону Гука (8)-(10) при произвольных деформациях представляют собой соотношения неопределенности типа $\frac{0}{0}$ ($\mu = 0{,}5$). Отсюда следует вывод, что использование метода перемещений при расчете несжимаемого цилиндра затруднительно. Приведем решение данной задачи с использованием смешанного метода.

Введем в рассмотрение потенциал напряжения:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}; \;\; \sigma_\theta = \frac{du}{dr}. \tag{20}$$

Соотношения закона Гука (4)-(6) преобразуем к следующему виду:

$$\mathrm{E}_r = \frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta\right] - \mu E_r + (1+\mu)\lambda\,\mathrm{T}. \tag{21}$$

$$\mathrm{E}_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r\right] - \mu E_z + (1+\mu)\lambda\,\mathrm{T}. \tag{22}$$

$$\mathrm{E}_r + \mathrm{E}_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) - 2\mu E_z + 2(1+\mu)\lambda\,\mathrm{T}. \tag{23}$$

$$\mathrm{E}_r - \mathrm{E}_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta). \tag{24}$$

Подставим формулы (3) и (20) в соотношения (23)-(24)

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -E_z + 3\alpha\mathrm{T}, \tag{25}$$

$$\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} = \frac{3}{2E}\left(\frac{\varphi}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\right), \tag{26}$$

$$\frac{d}{dr}(\mathrm{ru}) = -E_z r + 3\lambda r T; \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{\mathrm{u}}{r}\right) = -\frac{3}{2E}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{r}\right). \tag{27}$$

Проинтегрируем соотношения (27) один раз по переменной r:

$$ru = -\frac{E_z}{2}r^2 + 3\lambda\int r\,\mathrm{T}\,dr + C_1. \tag{28}$$

$$\frac{u}{r} = -\frac{3}{2E}\ \frac{\varphi}{r} + C_2\,. \tag{29}$$

$$u = -\frac{E_z}{2} r + \frac{3\lambda}{r} \int r\,\mathrm{T}\,dr + \frac{C_1}{r}. \tag{30}$$

$$u = -\frac{3}{2E}\ \varphi + C_2\, r. \tag{31}$$

$$\varphi = \frac{2}{3} E\left[C_2 r - \frac{C_1}{r} - \frac{3\lambda}{r}\int r\,\mathrm{T}\,dr\right]. \tag{32}$$

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} = \frac{2}{3} E\left[C_2 - \frac{C_1}{r^2} - \frac{3\lambda}{r^2}\int r\,\mathrm{T}\,dr\right]. \tag{33}$$

$$\sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2}{3} E\left[C_2 + \frac{C_1}{r^2} + \frac{3\lambda}{r^2}\int r\,\mathrm{T}\,dr - 3\lambda T\right]. \tag{34}$$

$$E_r = \frac{du}{dr} = -\frac{E_z}{2} - \frac{C_1}{r^2} - \frac{3\lambda}{r^2}\int r\,\mathrm{T}\,dr + 3\lambda T. \tag{35}$$

$$E_\theta = -\frac{E_z}{2} + \frac{C_1}{r^2} + \frac{3\lambda}{r^2}\int r\,\mathrm{T}\,dr. \tag{36}$$

Проверим выполнение условия несжимаемости (12):

$$-E_z + E_z + 3\alpha T = 3\alpha T. \tag{37}$$

Используем граничные условия (7):

$$C_2 - \frac{C_1}{r^2} + 3\lambda\phi(\mathrm{r} = \mathrm{r}_1); \qquad C_2 - \frac{C_1}{r^2} + 3\lambda\phi(\mathrm{r} = \mathrm{r}_2); \tag{38}$$

$$C_1 = \frac{3\lambda r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}\left[\phi(\mathrm{r} = \mathrm{r}_2) - \phi(\mathrm{r} = \mathrm{r}_1)\right]. \tag{39}$$

$$C_2 = 3\lambda\phi(\mathrm{r}=\mathrm{r}_1) + \frac{3\lambda r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}\left[\phi(\mathrm{r}=\mathrm{r}_2) - \phi(\mathrm{r}=\mathrm{r}_1)\right]. \quad (40)$$

$$\phi(\mathrm{r}) = \frac{1}{r^2}\int r\,\mathrm{T}\,dr. \quad (41)$$

В соответствии с формулами (33)-(36) закон Гука (21)-(22) также выполняется.

Выводы:

1 Решение задачи обобщенной плоской деформации несжимаемого упругого цилиндра в перемещениях в виду наличия неопределенности типа $\frac{0}{0}$ в выражениях для напряжений. При использовании метода напряжений возникает вопрос об однозначном выражении радиального перемещения из двух соотношений Коши.

2 В статье получено аналитическое решение задачи при произвольном тепловом потоке с использованием смешанного метода.

Библиографический список

1 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

2 Тимошенко, С. П. Теория упругости [Текст] : учеб. / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.

3 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

4 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

5 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.