

УДК 539. 3/6

ОБОБЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО  
ЦИЛИНДРА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

В. Б. Огарков, С. В. Малюков, А. А. Аксенов

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассматривается обобщенная плоская деформация изотропного упругого цилиндра [1].

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \quad \sigma_r(r=r_1) = -p; \quad \sigma_r(r=r_2) = -q; \quad (1)$$

$$r \frac{dE_\theta}{dr} + E_\theta - E_r = 0; \quad E_r = \frac{du}{dr}; \quad E_\theta = \frac{u}{r}; \quad (2)$$

$$E_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)]; \quad E_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)]; \quad (3)$$

$$E_z = const = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)]; \quad (4)$$

$$E_r = \frac{(1+\mu)}{E} [(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] - \mu E_z. \quad E_\theta = \frac{(1+\mu)}{E} [(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r] - \mu E_z. \quad (5)$$

$$E_r + E_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) - 2\mu E_z. \quad (6)$$

$$E_r - E_\theta = \frac{(1+\mu)}{E} (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (7)$$

Для несжимаемого материала

$$E_r + E_\theta = -E_z; \quad E_r - E_\theta = \frac{3}{2E} (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (8)$$

В соответствии с соотношениями Коши (2):

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -E_z, \quad \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} = -\frac{3}{2E} r \frac{d\sigma_r}{dr}. \quad (9)$$

$$\frac{d}{dr}(ru) = -E_z r; \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) = -\frac{3}{2E} \frac{d\sigma_r}{dr}; \quad (10)$$

$$u = -\frac{E_z}{2} r + \frac{C_1}{r}, \quad u = -\frac{3}{2E} r \sigma_r + C_2 r. \quad (11)$$

$$\sigma_r = \frac{2}{3} E \left[ C_2 - \frac{C_1}{r^2} + \frac{E_z}{2} \right]. \quad (12)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2}{3} E \left[ C_2 + \frac{C_1}{r^2} + \frac{E_z}{2} \right]. \quad (13)$$

$$E_\theta = -\frac{E_z}{2} + \frac{C_1}{r^2}, \quad E_r = -\frac{E_z}{2} - \frac{C_1}{r^2}. \quad (14)$$

Отметим, что соотношение (8) выполняется. Проверим выполнение закона Гука (5):

$$E_z = \frac{3}{4E} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{E_z}{2}; \quad E_\theta = \frac{3}{4E} (\sigma_\theta - \sigma_r) - \frac{E_z}{2}. \quad (15)$$

$$-\frac{E_z}{2} - \frac{C_1}{r^2} = \frac{3}{4E} \frac{2E}{3} \left( -\frac{2C_1}{r^2} \right) - \frac{E_z}{2}. \quad (16)$$

$$-\frac{E_z}{2} + \frac{C_1}{r^2} = \frac{3}{4E} \frac{2E}{3} \frac{2C_1}{r^2} - \frac{E_z}{2}. \quad (17)$$

Соотношения закона Гука (5) и условия несжимаемости (8) выполняются. Используем теперь граничные условия (1).

$$\frac{2}{3}E \left[ C_2 - \frac{C_1}{r_1^2} + \frac{E_z}{2} \right] = -p; \quad \frac{2}{3}E \left[ C_2 - \frac{C_1}{r_2^2} + \frac{E_z}{2} \right] = -q; \quad (18)$$

$$C_1 = \frac{3r_1^2 r_2^2}{2E(r_2^2 - r_1^2)}(p - q); \quad C_2 = -\frac{3p}{2E} - \frac{E_z}{2} + \frac{3r_2^2}{2E(r_2^2 - r_1^2)}(p - q). \quad (19)$$

Для цилиндра с днищем [1]

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_z dz = N; \quad \sigma_z = EE_z + \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (20)$$

$$E_z = \frac{3N}{2\pi E(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{3p}{E} - \frac{3r_2^2(p - q)}{E(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (21)$$

В учебнике [1] дано следующее решение задачи в перемещениях при  $E_z = 0$ .

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r}; \quad E_\theta + E_r = 2A = 0; \quad A = 0. \quad (22)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)E_r + \mu E_\theta + \mu E_z]; \quad (23)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)E_\theta + \mu E_r + \mu E_z]; \quad (24)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)E_z + \mu E_r + \mu E_\theta]; \quad (25)$$

Для несжимаемого цилиндра:

$$\sigma_r = \frac{E(2\mu - 1)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{E(1 - 2\mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_z = 0; \quad (26)$$

Граничные условия могут быть записаны в двух вариантах:

$$\frac{E}{(1+\mu)} \frac{B}{r_1^2} = -p; \quad \frac{E}{(1+\mu)} \frac{B}{r_2^2} = -q; \quad (27)$$

$$\frac{E(2\mu-1)}{(1+\mu)} \frac{B}{r_1^2} = -(1-2\mu)p; \quad \frac{E(2\mu-1)}{(1+\mu)} \frac{B}{r_2^2} = -(1-2\mu)q. \quad (28)$$

Из соотношений (27) найти однозначное значение константы  $B$  невозможно. Из соотношений (28) следует, что при  $\mu = 0,5$  граничные условия формально выполняются, но найти однозначное значение константы  $B$  невозможно. Соотношения (26) в соответствии с формулами (12), (13) и (20) являются неверными.

Отметим, что если явная форма функции  $u(r)$  неизвестна (неоднородный материал), то из формул (23)-(25) для несжимаемого материала напряжения будут выражаться через неопределенности типа  $\frac{0}{0}$ .

Полученное в данной статье напряженно-деформированное состояние несжимаемого упругого цилиндра можно обобщить на неоднородный материал при  $E = E(r)$ , а также на пластические деформации цилиндра с секущим модулем  $E(r)$  [2, 3, 4].

#### Библиографический список

- 1 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.
- 2 Варданян, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М., 1995. – 568 с.
- 3 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М., 1999. – 592 с.
- 4 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М., 2005. – 544 с.