УДК 539.3

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Т. Н. Стородубцева, В. Б. Огарков, А. А. Аксенов
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова»
E-mail: tamara-tns@yandex.ru

Уравнения равновесия для упругого тела имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \tag{3}$$

В учебнике [1] приводятся следующие уравнения Ламе:

$$M\nabla^2 u + (\lambda + M)\frac{de}{dx} + X = 0, \tag{4}$$

$$M\nabla^2 v + (\lambda + M)\frac{de}{dy} + Y = 0 \; ; \tag{5}$$

$$M\nabla^2 w + (\lambda + M)\frac{de}{dz} + Z = 0. \tag{6}$$

Обобщенный закон Гука имеет вид [1]:

$$\begin{gathered} \sigma_x - \sigma_0 = 2\sigma(\varepsilon_x - \varepsilon_0), \\ \sigma_y - \sigma_0 = 2\sigma(\varepsilon_y - \varepsilon_0), \\ \sigma_z - \sigma_0 = 2\sigma(\varepsilon_z - \varepsilon_0). \end{gathered} \tag{7}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{3}, \tag{8}$$

$$\sigma_0 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3}.$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{9}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Параметры Ламе λ и M имеют следующий вид:

$$M = G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{10}$$

Соотношения (7)-(8) следует записать так:

$$2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)}(2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z).$$

$$2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)}(2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z), \tag{11}$$

$$2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)}(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y),$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{12}$$

Из соотношений (11)-(12) получим:

$$\sigma_x = \sigma_z + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x - \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z,$$

$$\sigma_y = \sigma_z + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_y - \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z. \qquad (13)$$

Следует рассмотреть систему уравнений (12):

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

$$\sigma_z = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)}(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y). \qquad (14)$$

Подставим вторую формулу (14) в соотношения (13):

$$\sigma_z = \frac{(\sigma_z + \sigma_y)}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\varepsilon_x - \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{(\sigma_x + \sigma_z)}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\varepsilon_y - \varepsilon_x). \qquad (15)$$

Формулы (15) эквивалентны одному соотношению:

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)}(\varepsilon_x - \varepsilon_y). \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь систему двух уравнений:

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)}(\varepsilon_x - \varepsilon_y),$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\sigma_z - \frac{E}{(1+\nu)}(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y). \qquad (17)$$

$$\sigma_x = \sigma_z + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x - \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z,$$

$$\sigma_y = \sigma_z + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_y - \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z. \tag{18}$$

Если подставить формулы (18) в соотношения (11), то они будут удовлетворяться автоматически, а соотношение (12) примет такой вид:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_z - \frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)}\sigma_x(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y). \tag{19}$$

Соотношения Коши и закон Гука примут вид:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy};\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx};\ \tau_{zy} = G\gamma_{zy}, \tag{20}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\ \ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\ \ \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{21}$$

Подставим формулы (20) и(21) в соотношения (1)-(3) и (19):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_z - \frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)}\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{E}{(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{E}{(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X = 0,\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_z}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{E}{(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\ + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} - \frac{E}{(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} + Y = 0,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + Z = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

В учебнике [1] приводятся следующие выражения для закона Гука:

$$\sigma_x = 2M\varepsilon_x + \lambda e; \;\; \sigma_y = 2M\varepsilon_y + \lambda e; \quad \sigma_z = 2M\varepsilon_z + \lambda e, \qquad (26)$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \;\; \lambda + M = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}. \qquad (27)$$

Для несжимаемого материала $(\nu = \frac{1}{2})$ в уравнениях Ламе (1)-(3) имеется бесконечный коэффициент $\lambda + M$, а в законе Гука (26) для нахождения напряжений имеется неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Полученные формулы (22)-(25) не содержат неограниченных коэффициентов при $\nu = \frac{1}{2}$. Отметим также, что в случае несжимаемого материала для нахождения перемещений u, v и w имеются четыре уравнения (включая условие несжимаемости), что не желательно.

Библиографический список

1 Варданян, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М., 1995. – 568 с.