

УДК 539. 3/6

ОБОБЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ РАВНОМЕРНО-
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ВАЛА ИЗ
НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Огарков В. Б., Аксенов А. А., Малюков С. В.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Исходная система уравнений для решения данной задачи имеет следующий вид [1-10]:

$$Z \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \gamma \omega^2 r^2 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} \right) - r \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad (3)$$

$$\sigma_r - \sigma_0 = 26(\varepsilon_r - \varepsilon_0); \quad \sigma_\theta - \sigma_0 = 26(\varepsilon_\theta - \varepsilon_0); \quad (4)$$

$$\sigma_z - \sigma_0 = 26(\varepsilon_z - \varepsilon_0); \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z); \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z); \quad (6)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}; \quad C = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (7)$$

В случае несжимаемого тела [4-7]:

$$\mu = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{E}{3}; \quad K = \infty; \quad (8)$$

$$\varepsilon_0 = 0; \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0; \quad \sigma_r - \sigma_0 = \frac{E}{3} \varepsilon_r; \quad (9)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{E}{3} \varepsilon_\theta; \quad \sigma_z - \sigma_0 = \frac{E}{3} \varepsilon_z; \quad (10)$$

$$\frac{2}{3} \sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{3} - \frac{\sigma_z}{3} = \frac{E \varepsilon_r}{3}; \quad (11)$$

$$\frac{2}{3}\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_r}{3} - \frac{\sigma_z}{3} = \frac{E\varepsilon_{\theta}}{3}; \quad (12)$$

$$\frac{2}{3}\sigma_z - \frac{\sigma_{\theta}}{3} - \frac{\sigma_r}{3} = \frac{E\varepsilon_z}{3}; \quad (13)$$

$$2\sigma_r - \sigma_{\theta} - \sigma_z = E\varepsilon_r; \quad 2\sigma_{\theta} - \sigma_r - \sigma_z = E\varepsilon_{\theta}; \quad (14)$$

$$2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_{\theta} = E\varepsilon_z; \quad \varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z = 0; \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_r - \sigma_z - E\varepsilon_r; \quad (16)$$

$$2\{2\sigma_r - \sigma_z - E\varepsilon_r\} - \sigma_r - \sigma_z = E\varepsilon_{\theta}; \quad (17)$$

$$3\sigma_r - 3\sigma_z = E\varepsilon_{\theta} + 2E\varepsilon_r; \quad (18)$$

$$\sigma_r = \sigma_z + \frac{E}{3}\varepsilon_{\theta} + \frac{2}{3}E\varepsilon_r; \quad (19)$$

$$\sigma_{\theta} = 2\left\{\sigma_z + \frac{E}{3}\varepsilon_{\theta} + \frac{2}{3}E\varepsilon_r\right\} - \sigma_z - E\varepsilon_r; \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_z + \frac{E}{3}\varepsilon_r + \frac{2E}{3}\varepsilon_{\theta}; \quad (21)$$

$$2\sigma_z - \left\{\sigma_z + \frac{E}{3}\varepsilon_r + \frac{2E}{3}\varepsilon_{\theta}\right\} - \left\{\sigma_z + \frac{E}{3}\varepsilon_{\theta} + \frac{2E}{3}\varepsilon_r\right\} = E\varepsilon_z; \quad (22)$$

$$-E\varepsilon_r - E\varepsilon_{\theta} = E\varepsilon_z; \quad \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} = 0. \quad (23)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} = -\varepsilon_z; \quad \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -\varepsilon_z. \quad (24)$$

$$z = e^x. \quad \frac{du}{dx} + u = -\varepsilon_z e^x. \quad (25)$$

$$\operatorname{fhx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad \operatorname{chx} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad (26)$$

$$e^x = \operatorname{fhx} + \operatorname{chx}. \quad (27)$$

$$\frac{du}{dx} + u = -\varepsilon_z(\operatorname{fhx} + \operatorname{chx}). \quad (28)$$

$$u(x) = C_1 \operatorname{fhx} + C_2 \operatorname{chx}; \quad (29)$$

$$C_1 \operatorname{chx} + C_2 \operatorname{fhx} + C_1 \operatorname{fhx} + C_2 \operatorname{chx} = -\varepsilon_z \operatorname{fhx} - \varepsilon_z \operatorname{chx}. \quad (30)$$

$$C_2 + C_1 = -\varepsilon_z; \quad C_1 + C_2 = -\varepsilon_z. \quad (31)$$

$$C_1 = -C_2 - \varepsilon_z; \quad u(x) = (-C_2 - \varepsilon_z)fhx + C_2 chx. \quad (32)$$

$$u(x) = -\varepsilon_z fhx + C_2 [chx - fhx]. \quad (33)$$

$$u(x) = -\varepsilon_z fhx + C_2 e^{-x}; \quad u(r) = \frac{c_2}{r} - \frac{\varepsilon_z}{2} \left[r - \frac{1}{r} \right]. \quad (34)$$

$$\sigma_r = \sigma_z + \frac{E}{3} [\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_r]; \quad \sigma_\theta = \sigma_z + \frac{E}{3} [\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta]. \quad (35)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{C_2}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2} \left[1 - \frac{1}{r^2} \right]. \quad (36)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{C_2}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2} \left[1 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (37)$$

$$\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_r = -\frac{C_2}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2} \left[1 - \frac{1}{r^2} \right] - \varepsilon_z \left[1 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (38)$$

$$\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_r = -\frac{c_2}{r^2} - \frac{3}{2} \varepsilon_z. \quad (39)$$

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{C_2}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \varepsilon_z \left[1 - \frac{1}{r^2} \right]. \quad (40)$$

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{2} \varepsilon_z. \quad (41)$$

$$\sigma_r = \sigma_z + \frac{E}{3} \left\{ -\frac{c_2}{r^2} - \frac{3}{2} \varepsilon_z \right\}. \quad (42)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_z + \frac{E}{3} \left\{ \frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{2} \varepsilon_z \right\}. \quad (43)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{E}{3} \left[-\frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{2} \varepsilon_z - \frac{c_2}{r^2} + \frac{3}{2} \varepsilon_z \right]. \quad (44)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{2EC_2}{3r^2}. \quad (45)$$

$$r \frac{d\sigma_z}{dr} - \frac{E}{3} r \frac{d}{dr} \left[\frac{C_2}{r^2} + \frac{3}{2} \varepsilon_z \right] - \frac{2EC_2}{3r^2} + \gamma\omega^2 r^2 = 0. \quad (46)$$

$$r \frac{d\sigma_z}{dz} - \frac{2Ec_2}{3r^2} + \frac{E}{3} \frac{2C_2}{r^2} + \gamma\omega^2 r^2 = 0. \quad (47)$$

$$r \frac{d\sigma_z}{dr} = -\gamma\omega^2 r^2; \quad \frac{d\sigma_z}{dr} = -\gamma\omega^2 r. \quad (48)$$

$$\sigma_z = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + C_1. \quad (49)$$

$$\sigma_r = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + C_1 - \frac{EC_2}{3r^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2}. \quad (50)$$

$$\sigma_\theta = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + C_1 + \frac{EC_2}{3r^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2}. \quad (51)$$

Используем граничные условия:

$$\sigma_r(r = r_1) = 0; \quad \sigma_r(r = r_2) = 0. \quad (52)$$

$$\frac{-\gamma\omega^2 r_1^2}{2} + C_1 - \frac{EC_2}{3r_1^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2} = 0. \quad (53)$$

$$\frac{-\gamma\omega^2 r_2^2}{2} + C_1 - \frac{EC_2}{3r_2^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2} = 0. \quad (54)$$

$$\frac{EC_2}{3} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) = 0. \quad (55)$$

$$\frac{EC_2}{3} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_1^2 - r_2^2). \quad (56)$$

$$C_2 = \frac{3\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{2E}. \quad (57)$$

$$C_1 = \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{EC_2}{3r_1^2}. \quad (58)$$

$$C_1 = \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{2}. \quad (59)$$

$$\sigma_r = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} - \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{2} - \frac{E}{3r^2} \frac{3\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{2E}. \quad (60)$$

$$\sigma_r = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_1^2 + r_2^2) - \frac{\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{2r^2}. \quad (61)$$

$$\sigma_\theta = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} - \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{2} - \frac{E}{3r^2} \left[\frac{3\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{2E} \right]. \quad (62)$$

$$\sigma_\theta = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{2r^2}. \quad (63)$$

$$\sigma_z = \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_1^2 + r_2^2). \quad (64)$$

Для цилиндра с днищем:

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_z dr = N. \quad (65)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r \left\{ \frac{-\gamma\omega^2 r^2}{2} + \frac{E\varepsilon_z}{2} + \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_1^2 + r_2^2) \right\} dr = \frac{N}{2\pi}. \quad (66)$$

$$\frac{E\varepsilon_z}{4} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{\gamma\omega^2}{4} (r_1^2 + r_2^2)(r_2^2 - r_1^2) - \frac{\gamma\omega^2}{8} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{N}{2\pi}. \quad (67)$$

$$\frac{E\varepsilon_z}{4} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{N}{2\pi} + \frac{\gamma\omega^2}{8} (r_2^4 - r_1^4) - \frac{\gamma\omega^2}{4} (r_1^2 + r_2^2)(r_2^2 - r_1^2). \quad (68)$$

$$\frac{E\varepsilon_z}{4} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{N}{2\pi} - \frac{\gamma\omega^2}{8} (r_2^4 - r_1^4). \quad (69)$$

$$E\varepsilon_z (r_2^2 - r_1^2) = \frac{2N}{\pi} - \frac{\gamma\omega^2}{2} (r_2^4 - r_1^4). \quad (70)$$

$$\varepsilon_z = \frac{2N}{\pi E (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{\gamma\omega^2}{E} (r_2^2 + r_1^2). \quad (71)$$

При решении данной задачи методом перемещений используются следующий закон Гука [2]

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1+2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z]. \quad (72)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1+2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z]. \quad (73)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1+2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta]. \quad (74)$$

Выражение для радиального перемещения задается следующей формулой:

$$U(r) = Ar + \frac{B}{r}. \quad (75)$$

$$\varepsilon_\theta = A + \frac{B}{r^2}. \quad (76)$$

$$\varepsilon_r = A - \frac{B}{r^2}. \quad (77)$$

Для несжимаемого материала:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (78)$$

$$2A = -\varepsilon_z. \quad (79)$$

$$A = -\frac{\varepsilon_r}{2}. \quad (80)$$

Подставим в формуле закона Гука деформации при $\mu = \frac{1}{2}$

$$\sigma_z = \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2E}{3(1-2\mu)} \frac{1}{2} [\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z]. \quad (81)$$

$$\sigma_\theta = \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2E}{3(1-2\mu)} \frac{1}{2} [\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z]. \quad (82)$$

$$\sigma_z = \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2E}{3(1-2\mu)} \frac{1}{2} [\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z]. \quad (83)$$

Предыдущие соотношения представляют собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Более того, наличие в выражении для $U(r)$ только одной неопределенной константы B не позволяет удовлетворить двум граничным условиям. В напряжениях, при заданных внутреннем и внешнем давлениях p и q (двухслойный вал). При решении данной задачи в напряжениях возникают следующие проблемы:

- 1 Определение однозначного перемещения из закона Гука через нахождение напряжения по двум формулам Каши.
- 2 Определение тангенциального напряжения σ_θ через радиальное напряжение σ_r – этого не нужно делать.
- 3 Исчезновение при расчетах в напряжениях деформации ε_z , что недопустимо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. [Текст] : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.
- 2 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.
- 3 Бувич, Ю. А. Структурно-механические свойства и фильтрация в упругом трещиновато-пористом материале [Текст] : Ю. А. Бувич // ИФЖ. – 1984. – Т. 46. – № 4.
- 4 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния

упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.

5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ. / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

9 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

10 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.