УДК 539. 3/.6

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Огарков В. Б., Аксенов А. А., Малюков С. В.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+d_1\frac{d\varphi}{dx}+d_2\,\varphi=F(x). \qquad (1)$$

В этом уравнении: $F(x)$ – заданная действительная функция вещественного аргумента; d_1 и d_2 – заданные вещественные коэффициенты.

Рассмотрим случай однородного уравнения (1):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+d_1\frac{d\varphi}{dx}+d_2\varphi=0. \qquad (2)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$Л_1(x)=\frac{d\varphi}{dx}+(c+i\sqrt{d})\varphi. \qquad (3)$$

$$2c=d_1; \qquad c^2+d=d_2 \qquad (4)$$

$$c=\frac{d1}{2}; \qquad d=d_2-\frac{d_1{}^2}{4}. \qquad (5)$$

Функция $Л_1(x)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dЛ_1}{dx}+(c-i\sqrt{d})Л_1=0. \qquad (6)$$

$$Л_1(x)=De^{-(c-i\sqrt{d})x}. \qquad (7)$$

Найдем функцию $\varphi(x)$ из уравнения (3):

$$\frac{d\varphi}{dx}+(c+i\sqrt{d})\varphi=Л_1=De^{-(c-i\sqrt{d})x}. \qquad (8)$$

$$\varphi(x)=e^{-(c+i\sqrt{d})x}\{D\int e^{(c+i\sqrt{d})x}e^{-(c-i\sqrt{d})x)}dx+L\}. \qquad (9)$$

$$\varphi(x)=Le^{-(c+i\sqrt{d})x}+\frac{D}{2i\sqrt{d}}e^{(i\sqrt{d}-c)x}. \qquad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{D}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d}-c\right)e^{(i\sqrt{d}-c)x}-L(c+i\sqrt{d})\,e^{-(c+i\sqrt{d})x}. \qquad (11)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{D}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d} - c\right)^2 e^{\left(i\sqrt{d}-c\right)x} + L(c+i\sqrt{d})^2 e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}. \quad (12)$$

Подставим формулу (10)-(12) в исходное уравнение (2):

$$\frac{D}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d} - c\right)^2 + L(c+i\sqrt{d})^2 e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x} + \frac{2cD}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d} - c\right)e^{\left(i\sqrt{d}-c\right)x} -$$

$$- L(c+i\sqrt{d})\, e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}2c + (c^2+d)\{\, e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\, [D\int e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x} e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+L]\}=0. \quad (13)$$

$$\frac{D}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d} - c\right)^2 e^{\left(i\sqrt{d}-c\right)x} + (c+i\sqrt{d})^2 e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x} + 2c\{\frac{D}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d} - c\right)e^{\left(i\sqrt{d}-c\right)x} -$$

$$- L(c+i\sqrt{d})\, e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\} + (c^2+d)\{\, L e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x} + \frac{D}{2i\sqrt{d}} e^{\left(i\sqrt{d}-c\right)x}\}=0. \quad (14)$$

$$\frac{D}{2i\sqrt{d}}\left(i\sqrt{d} - c\right)^2 + 2c(i\sqrt{d} - c) + c^2 + d] - d - 2i\sqrt{d}c + c^2 + 2ci\sqrt{d} - 2c^2 + c^2 + d = 0. \quad (15)$$

$$DL[c^2+d - 2c(c+i\sqrt{d}) + (c+i\sqrt{d})]^2 \cdot c^2 + d - 2c^2 - 2ci\sqrt{d} + c^2 + 2c\sqrt{d} - d = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1)

Соотношение (6) примет такой вид.

$$\frac{dЛ_1}{dx} + (c - i\sqrt{d})Л_1 = F(x). \quad (17)$$

$$Л_1(x) = e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx + c_1\}. \quad (18)$$

$$\frac{dЛ_1}{dx} = -\,(c - i\sqrt{d})\, e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx + c_1\} + F(x). \quad (19)$$

$$\frac{dЛ_1}{dx} = -\,C_1(c - i\sqrt{d})\, e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} - (c - i\sqrt{d})\, e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx + F(x). \quad (20)$$

$$- C_1(c - i\sqrt{d})\, e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} + F(x) - (c - i\sqrt{d})\, e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx +$$

$$+ (c - i\sqrt{d})\, e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\,\{\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx + C_1\} = 0. \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + (\, c + i\sqrt{d})\varphi = Л_1 = e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx + C_1\}. \quad (22)$$

$$\varphi(x) = e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{\,\int e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\,[C_1 e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} + e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)t}F(t)dt]dx\} + C_2. \quad (23)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\left(c + i\sqrt{d}\right)e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\,[c_1 e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} + e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)t}F(t)dt]dx\} +$$

$$+ C_2\} + e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\int C_1 e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x} e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} + e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x} e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx\}. \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\left(c + i\sqrt{d}\right)e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{\,\int e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\,[c_1 e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} + e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)t}F(t)dt]dx +$$

$$+ C_2\} + C_1 e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x} + e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx. \quad (25)$$

Подставим формулы (23) и (25) в уравнение (22):

$$-\left(c+i\sqrt{d}\right)e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\,[c_1e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)t}F(t)dt]dx+$$

$$+C_2\}+C_1e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx+\left(c+i\sqrt{d}\right)e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\cdot$$

$$\cdot[C_1e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)t}F(t)dt]dx+C_2\}=Л_1(x)=$$

$$=e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\{\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx+C_1\}=C_1e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx. \quad (26)$$

$$C_1e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx=C_1e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}+e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}\int e^{\left(c-i\sqrt{d}\right)x}F(x)dx. \quad (27)$$

Рассмотрим три случая :

$$d=0:\ d_2-\frac{d_1^2}{4}=0:\ d_2=\frac{d_1^2}{4}. \quad (28)$$

Соотношение (7) примет вид:

$$Л_1(x)=De^{-cx}=D\,e^{-\frac{d_1}{2}x}. \quad (29)$$

Из уравнения (9) получим:

$$\varphi(x)=e^{-\frac{d_1}{2}x}\,[D\int dx+L]=e^{-\frac{d_1}{2}x}\,[Dx+L]. \quad (30)$$

2. $d>0;\quad d_2>\frac{d_1^2}{4}$. (31)

Формула (7) примет такой вид:

$$Л_1(x)=D\,e^{-\frac{d_1}{2}x}\,e^{i\sqrt{d}x}. \quad (32)$$

$$e^{i\sqrt{d}}=\cos\sqrt{d}x+i\sin\sqrt{d}x. \quad (33)$$

$$Л_1(x)=D\,e^{-\frac{d_1}{2}x}\,[\cos\sqrt{d}x+i\sin\sqrt{d}x]. \quad (34)$$

Формула (9) примет такой вид:

$$\varphi(x)=e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{D\int e^{2i\sqrt{d}x}dx+L\}. \quad (35)$$

$$\varphi(x)=e^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}\{\frac{D}{2i\sqrt{d}}\,e^{2i\sqrt{d}x}+L\}. \quad (36)$$

$$\varphi(x)=Le^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}+\frac{D}{2i\sqrt{d}}\,e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}. \quad (37)$$

$$\varphi(x)=Le^{-\left(c+i\sqrt{d}\right)x}-\frac{Di}{2\sqrt{d}}\,e^{-\left(c-i\sqrt{d}\right)x}. \quad (38)$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}[Le^{-i\sqrt{d}x}-\frac{Di}{2\sqrt{d}}\,e^{i\sqrt{d}x}]. \quad (39)$$

$$e^{i\sqrt{d}x}=\cos\sqrt{d}x+i\sin\sqrt{d}x. \quad (40)$$

$$e^{-i\sqrt{d}x}=\cos\sqrt{d}x - i\sin\sqrt{d}x. \qquad (41)$$

$$\varphi(x) = e^{-\frac{d_1}{2}x}\{L(\cos\sqrt{d}x - i\sin\sqrt{d}x) - \frac{Di}{2\sqrt{d}}(\cos\sqrt{d}x + i\sin\sqrt{d}x)\}. \qquad (42)$$

$$\varphi(x)= e^{-\frac{d_1}{2}x}\{L\cos\sqrt{d}x - i\sin\sqrt{d}xL - \frac{Di}{2\sqrt{d}}\cos\sqrt{d}x + \frac{D}{2\sqrt{d}}\sin\sqrt{d}x\}. \qquad (43)$$

$$\varphi(x)= e^{-\frac{d_1}{2}x}\{L\cos\sqrt{d}x + \frac{D}{2\sqrt{d}}\sin\sqrt{d}x - i[\frac{D}{2\sqrt{d}}\cos\sqrt{d}x - L\sin\sqrt{d}x]\}. \qquad (44)$$

Решение имеет вид суммы действительной и мнимой частей выражения (44)

$$\varphi(x)= e^{-\frac{d_1}{2}x}[L\cos\sqrt{d}x + \frac{D}{2\sqrt{d}}\sin\sqrt{d}x - \frac{D}{2\sqrt{d}}\cos\sqrt{d}x + L\sin\sqrt{d}x]. \qquad (45)$$

$$\varphi(x)= e^{-\frac{d_1}{2}x}[(L - \frac{D}{2\sqrt{d}})\cos\sqrt{d}x + (\frac{D}{2\sqrt{d}}+L)\sin\sqrt{d}x]. \qquad (46)$$

3 случай; $d<0$; $d_2>\frac{d_1{}^2}{4}$

Формула (7) примет такой вид:

$$Л(x)=De^{-cx}\ e^{i\sqrt{-|d|}x}. \qquad (47)$$

$$Л(x)= De^{-cx}\ e^{-\sqrt{|d|}x}. \qquad (48)$$

Формула (9) запишется так:

$$\varphi(x)= e^{-(c-\sqrt{|d|})x}\{D\int e^{2i\sqrt{d}x}dx+L\}. \qquad (49)$$

$$\varphi(x)= e^{-(\frac{d_1}{2}-\sqrt{|d|})x}\{ D\int e^{-2\sqrt{|d|}x}dx+L\}. \qquad (50)$$

$$\varphi(x)= e^{-(\frac{d_1}{2}-\sqrt{|d2-\frac{d_1^2}{4}|})x}\{-\frac{D}{2\sqrt{|d|}}e^{-2\sqrt{|d|}x}+L\}. \qquad (51)$$

$$\varphi(x)= Le^{-(\frac{d_1}{2}-\sqrt{|d2-\frac{d_1^2}{4}|})x}-\frac{D}{2\sqrt{|d2-\frac{d_1^2}{4}|}}e^{-(\frac{d_1}{2}+\sqrt{|d2-\frac{d_1^2}{4}|})x}. \qquad (52)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{d_1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+d_2\frac{\varphi}{r^2}=F(r). \qquad (53)$$

$$r=e^x:\ dr=e^x dx. \qquad (54)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]+\frac{d_1}{e^{2x}}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d_2\varphi}{e^2x}=\bar{F}(e^x). \qquad (55)$$

$$\frac{d}{dr}[\frac{1}{e^x}\frac{d\varphi}{dx}]+\frac{d_1}{e^{2x}}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d_2}{e^{2x}}\varphi = \bar{F}(e^x). \qquad (56)$$

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{e^x}\frac{d\varphi}{dx}]+\frac{d_1}{e^x}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d_2}{e^x}\varphi=e^x\,\bar{F}(e^x). \quad (57)$$

$$-\frac{1}{e^x}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{1}{e^x}\frac{d_2\varphi}{dx^2}+\frac{d_1}{e^x}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d_2}{e^x}\varphi=e^x\bar{F}(e^x). \quad (58)$$

$$\frac{d_2\varphi}{dx^2}+[d_1-1]\frac{d\varphi}{dx}+d_2\varphi=e^{2x}\bar{F}(e^x). \quad (59)$$

$$C=\frac{(d_1-1)}{2};\ d=d_2-\frac{(d_1-1)^2}{4}. \quad (60)$$

$$\frac{dЛ_1}{dx}+(c-i\sqrt{d})\,Л_1=e^{2x}\bar{F}(e^x). \quad (61)$$

$$c-i\sqrt{d}=\frac{(d_1-1)}{2}-i\sqrt{[d_2-\frac{(d_1-1)^2}{4}]}\,. \quad (62)$$

Рассмотрим однородное уравнение (53)

$$F(r)=0. \quad (63)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(d_1-1)\frac{d\varphi}{dx}+d_2\varphi=0. \quad (64)$$

$$Л(x)=C_1e^{-(c-i\sqrt{d})x}. \quad (65)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}+(c+i\sqrt{d})\varphi=Л_1=C_1e^{-(c-i\sqrt{d})x}. \quad (66)$$

$$\varphi=e^{-(c+i\sqrt{d})x}\,[C_1\int e^{(c+i\sqrt{d})x}e^{-(c-i\sqrt{d})x}dx+C_2]. \quad (67)$$

$$\varphi(x)=e^{-(c+i\sqrt{d})x}\,[C_1\int e^{2i\sqrt{d}x}dx+C_2]. \quad (68)$$

$$\varphi(x)=e^{-(c+i\sqrt{d})x}\,[\frac{c_1}{2i\sqrt{d}}e^{2i\sqrt{d}x}+C_2]. \quad (69)$$

$$\varphi(x)=\frac{c_1}{2i\sqrt{d}}e^{-(c-i\sqrt{d})x}+C_2e^{-(c+i\sqrt{d})x}. \quad (70)$$

1 случай:

$$d=0;\ d_2=\frac{(d_1-1)^2}{4}. \quad (71)$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}[C_1x+C_2]. \quad (72)$$

$$x=\ln r;\ \varphi(r)=r^{-c}[C_1\ln r+C_2]. \quad (73)$$

Для полого цилиндра.

$$\varphi(r)=r^{-c}[C_1\ln r+C_2]. \quad (74)$$

Для сплошного цилиндра:

а) c > 0.

$$\varphi(r)=\frac{C_1 \ln r}{r^{|c|}}+\frac{C_2}{r^{|c|}}. \tag{75}$$

$$\lim_{r\to 0}\{\frac{c_1 lnr}{r^{IcI}}+\frac{c_2}{r^{IcI}}\}=\infty. \tag{76}$$

$$C_1=C_2=0. \tag{77}$$

б) c < 0

$$\varphi(r)= C_1 r^{IcI} \ln r+C_2 r^{IcI} . \tag{78}$$

$$\lim_{r\to 0} =0\cdot(-\infty). \tag{79}$$

$$\lim_{r\to 0}=\frac{lnr}{r^{-IcI}}=\frac{\frac{1}{r}}{-IcIr^{[-IcI-1]}}=\lim_{r\to 0}\{-\frac{r^{-1}}{IcIr^{-[IcI+1]}}\}=\lim_{r\to 0}\{-\frac{\cancel{r^{-1}}}{IcIr^{-IcI}\quad \cancel{r^{-1}}}\}=\lim_{r\to 0}-[\frac{r^{IcI}}{IcI}]=0. \tag{80}$$

$$\lim_{r\to 0}\{C_1 \ln r\cdot r^{IcI}+C_2 r^{IcI}\}=0. \tag{81}$$

При $c<0$; $\frac{(a_1-1)}{2}<0$; $a_1<1$;

$$\varphi(r)=C_1 r^{IcI} \ln r+C_2 r^{IcI}=r^{IcI}[C_1 \ln r+C_2]. \tag{82}$$

2 случай: $d<0$.

$$\sqrt{d} =\sqrt{-|d|} =i\sqrt{|d|}. \tag{83}$$

$$i\sqrt{d} = -\sqrt{|d|}. \tag{84}$$

$$\varphi(x)=-\frac{C_1}{2\sqrt{|d|}}\, e^{-(c+\sqrt{|d|})x}+C_2\, e^{-(c-\sqrt{|d|})x}. \tag{85}$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}\{\frac{-C_1}{2\sqrt{|d|}}\, e^{-\sqrt{|d|}x}+C_2 e^{\sqrt{|d|}x} \}. \tag{86}$$

$x=\ln r$;

$$\varphi(r)=r^{-c}\{-\frac{C_1}{2\sqrt{|d|}}\, r^{-\sqrt{|d|}}+C_2 r^{\sqrt{|d|}}\}. \tag{87}$$

Для полого цилиндра:

$$\varphi(r)=r^{-c}\{-\frac{C_1}{2\sqrt{|d|}}\, r^{-\sqrt{|d|}}+C_2\, r^{\sqrt{|d|}}\}. \tag{88}$$

Для сплошного цилиндра:

а) c < 0;

$$\varphi(r)=r^{IcI}[C_2 r^{\sqrt{|d|}}]=C_2\, r^{(|c|+\sqrt{|d|})}. \tag{89}$$

б) c > 0;

$$\varphi(r)=-\frac{C_1}{2\sqrt{|d|}}\,r^{-(c+\sqrt{|d|})}+C_2\,r^{(\sqrt{|d|}-c)}. \quad (90)$$

$$C_1=0; \quad \varphi(r)=C_2\,r^{(\sqrt{|d|}-c)}. \quad (91)$$

При $\sqrt{|d|}-c<0$; $\sqrt{|d|}<c$;

$C_2=0$;

При $\sqrt{|d|}>c$;

$$\varphi(r)=C_2\,r^{(\sqrt{|d|}-c)}. \quad (92)$$

3 случай: $d > 0$;

$$\varphi(x)=\frac{C_1}{2i\sqrt{d}}\,e^{-(c-\sqrt{d})x}+C_2\,e^{-(c+\sqrt{d})x}\,. \quad (93)$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}[\frac{C_1e^{i\sqrt{d}x}}{2i\sqrt{d}}+C_2e^{-i\sqrt{d}x}]=e^{-cx}\{\frac{C_1}{2i\sqrt{d}}(\cos\sqrt{d}x+i\sin\sqrt{d}x)+C_2(\cos\sqrt{d}x-i\sin\sqrt{d}x)\}. \quad (94)$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}\{-\frac{C_1 i}{2\sqrt{d}}(\cos\sqrt{d}x+i\sin\sqrt{d}x)+C_2(\cos\sqrt{d}x-i\sin\sqrt{d}x)\}. \quad (95)$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}\{\frac{C_1}{2\sqrt{d}}\sin\sqrt{d}x\frac{-iC_1}{2\sqrt{d}}\cos\sqrt{d}x+C_2\cos\sqrt{d}x-iC_2\sin\sqrt{d}x\}. \quad (96)$$

$$\varphi(x)=e^{-cx}\{(\frac{C_1}{2\sqrt{d}}\sin\sqrt{d}x+C_2\cos\sqrt{d}x-i(\frac{C_1}{2\sqrt{d}}\cos\sqrt{d}x+C_2\sin\sqrt{d}x)\}. \quad (97)$$

Решение ищем в виде суммы действительной и мнимой частей формулы (97)

$$\varphi(x)=e^{-cx}[(C_2-\frac{C_1}{2\sqrt{d}})\cos\sqrt{d}x+(\frac{C_1}{2\sqrt{d}}-C_2)\,\sin\sqrt{d}x]. \quad (98)$$

$$\varphi(x)=r^{-c}[(C_2-\frac{C_1}{2\sqrt{d}})\cos[\sqrt{d}\ln r]+(\frac{C_1}{2\sqrt{d}}-C_2)\sin[\sqrt{d}\ln r]]. \quad (99)$$

Для полого цилиндра:

$$\varphi(x)=r^{-c}\{(C_2-\frac{C_1}{2\sqrt{d}})\cos[\sqrt{d}\ln r]+(\frac{C_1}{2\sqrt{d}}-C_2)\sin[\sqrt{d}\ln r]\}. \quad (100)$$

Для сплошного цилиндра:

а) $c > 0$

$$\varphi(x)=0:\ C_2=C_1=0. \quad (101)$$

б) $c < 0$;

$$\varphi(x)=r^{|c|}\{(C_2-\frac{C_1}{2\sqrt{d}})\cos[\sqrt{d}\ln r]+(\frac{C_1}{2\sqrt{d}}-C_2)\sin[\sqrt{d}\ln r]\}. \quad (102)$$

Поскольку $\cos[\sqrt{d}\ln r]$ и $\sin[\sqrt{d}\ln r]$ имеют ограниченное значение между (-1) и (+1) для всех значений r, в том числе и при r=0, то формула (102) сохраняет свой вид и в окрестности точки r=0.

Будем искать решение однородного уравнения (53) в спектральной форме:

$$\varphi = r^{\lambda}. \tag{103}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \lambda r^{(\lambda-1)} . \tag{104}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \lambda(\lambda=1) r^{(\lambda-2)} . \tag{105}$$

$$\lambda(\lambda=1) r^{(\lambda-2)} + d_1 \lambda r^{(\lambda-2)} + d_2 r^{(\lambda-2)} = 0. \tag{106}$$

$$\lambda^2 - \lambda + d_1\lambda + d_2 = 0. \tag{107}$$

$$\lambda^2 + (d_1 - 1)\lambda + d_2 = 0. \tag{108}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(d_1-1)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{-(d_1-1)^2}{4} - d_2\right]} . \tag{109}$$

$$\varphi(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2}. \tag{110}$$

при $d_2 = \frac{(d_1-1)^2}{4}$;

$$\varphi(r) = r^{\frac{-(d_1-1)}{2}} (C_1 + C_2) . \tag{111}$$

Решение (111) по существу является неверным, поскольку оно не позволяет получить решение в форме (74), в случае комплексных значений констант λ_1 и λ_2 приводит к трудностям при вычислении значении функции $\varphi(r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Корн, Г. Справочник по математике [Текст] : учеб. / Г. Корн, Т. Корн. – М. : «Наука», 1970. – 720 с.

2 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

3 Буевич, Ю. А. Структурно-механические свойства и фильтрация в упругом трещиновато-пористом материале [Текст] : Ю. А. Буевич // ИФЖ. – 1984. – Т. 46. – № 4.

4 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия [Текст] /

А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.

5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ. / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4 – pp. 15-23.

9 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

10 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.

11 Тимошенко, С. П. Теория упругостей [Текст] : учеб. / С. П. Тимошенко, Д. Ж. Гудьер. – М. : Наука, 1975 – 576 с.

12 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. [Текст] : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

13 Костунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел [Текст] : учеб. / М. А. Костунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – М. : Высшая школа, 1975. – 526 с.

14 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.

15 Огарков, В. Б. Об одном способе решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в цилиндрической системе координат [Текст] / Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 4. – № 4 (22). – С. 68-72.