

УДК 539. 3/6

ОБОБЩЁННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ РАВНОМЕРНО
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Аксенов А. А., Огарков В. Б., Малюков С. В.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Рассмотрим обобщённую плоскую деформацию равномерно вращающегося изотропного упругого цилиндра [1-10]:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} \right) - r \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad (2)$$

Для нахождения напряжений в работе [2] получены следующие формулы:

$$\sigma_r = \sigma_z + \frac{E}{(1+\mu)} (\varepsilon_r - \varepsilon_z); \quad \sigma_\theta = \sigma_z + \frac{E}{(1+\mu)} (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z); \quad (3)$$

Подставим формулу (3) в уравнение (1):

$$z \left\{ \frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{E}{(1+\mu)} \times \frac{d\varepsilon_r}{dr} \right\} + \frac{E}{(1+\mu)} (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta) + \rho\omega^2 r^2 = 0; \quad (4)$$

С использованием соотношений Коши (2):

$$\frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{E}{(1+\mu)} \times \frac{d\varepsilon_r}{dr} + \frac{E}{(1+\mu)} \times \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) + \rho\omega^2 z = 0; \quad (5)$$

Проинтегрируем уравнение (5) один раз по r:

$$\sigma_z + \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_r + \frac{E}{(1+\mu)} \times \frac{u}{r} + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + C_1 = 0; \quad (6)$$

Объёмный закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{(1-2\mu)}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z); \quad (7)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 3\sigma_z + \frac{E}{(1+\mu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - \frac{2E\varepsilon_z}{(1+\mu)}; \quad (8)$$

Из соотношений (3) и (7) получим:

$$\frac{3\mu}{(1+\mu)}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_z - \frac{3 \times (1-\mu)}{(1+\mu)}\varepsilon_z; \quad (9)$$

Из формулы (6) будем иметь:

$$\sigma_z = -\frac{E}{(1+\mu)}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - C_1 - \frac{\rho\omega^2}{2}r^2; \quad (10)$$

Подставим формулу (10) в соотношение (9):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{-(1+\mu)(1-2\mu)}{E \times (1-\mu)}C_1 - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)}\rho\omega^2r^2; \quad (11)$$

С учётом соотношений Коши (2):

$$u(r) = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)}C_1 \times r - \frac{\varepsilon_z}{2}r + \frac{C_2}{r} - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)}\rho\omega^2r^3; \quad (12)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E \times (1-\mu)}C_1 - \frac{\varepsilon_z}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)}r^2; \quad (13)$$

$$\varepsilon_r = \frac{-(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)}C_1 - \frac{\varepsilon_z}{2} - \frac{C_2}{r^2} \times \frac{-3(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)}r^2; \quad (14)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = -\varepsilon_z \frac{-(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)}\rho\omega^2r^2; \quad (15)$$

Используем формулу (10):

$$\sigma_z = \frac{-\mu}{(1-\mu)} \times \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 + \frac{E\varepsilon_r}{(1+\mu)} - \frac{\mu}{(1-\mu)}C_1; \quad (16)$$

$$\sigma_z = \frac{-C_2E}{(1+\mu)r^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2(1+\mu)} - \frac{C_1}{2(1-\mu)} - \frac{(3-2\mu)}{8(1-\mu)}\rho\omega^2r^2; \quad (17)$$

$$\sigma_\theta = \frac{EC_2}{(1+\mu)r^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2(1+\mu)} - \frac{C_1}{2(1-\mu)} - \frac{(1+2\mu)}{8(1-\mu)}\rho\omega^2r^2; \quad (18)$$

Используем граничные условия:

$$\sigma_z(r = r_1) = -p; \quad \sigma_z(r = r_2) = -q; \quad (19)$$

$$-\frac{C_2E}{(1+\mu)r_1^2} - \frac{E\varepsilon_z}{2(1+\mu)} - \frac{C_1}{2(1-\mu)} - \frac{(3-2\mu)}{8(1-\mu)}\rho\omega^2r_1^2 = -p; \quad (20)$$

$$-\frac{C_2 E}{(1+\mu)r_2^2} - \frac{E \varepsilon z}{2(1+\mu)} - \frac{C_1}{2(1-\mu)} - \frac{(3-2\mu)}{8(1-\mu)} \rho \omega^2 r_2^2 = -q; \quad (21)$$

Решение систем (20) – (21) имеет вид:

$$C_2 = \frac{(1+\mu)(r_1^2 r_2^2)}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[p - q + \frac{(3-2\mu)}{8(1-\mu)} (r_2^2 - r_1^2) \rho \omega^2 \right]; \quad (22)$$

$$C_1 = 2(1-\mu) \left\{ p - \frac{E \varepsilon z}{2(1+\mu)} - \frac{(3-2\mu)}{8(1-\mu)} \rho \omega^2 r_1^2 - \frac{E}{(1+\mu)r_1^2} C_2 \right\}; \quad (23)$$

Для несжимаемого материала при $\mu = \frac{1}{2}$:

$$u = -\frac{\varepsilon_z}{2} r + \frac{C_2}{r}; \quad (24)$$

$$\sigma_z = -\frac{E \varepsilon z}{3} - \frac{2EC_2}{3r^2} - C_1 - \frac{\rho \omega^2}{2} r^2; \quad (25)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E \varepsilon z}{3} + \frac{2EC_2}{3r^2} - C_1 - \frac{\rho \omega^2}{2} r^2; \quad (26)$$

В учебнике [5] приводится следующее уравнение для нахождения радиального перемещения:

$$\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \times \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\omega^2}{C^2} r = 0; \quad (27)$$

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\rho}{(\lambda + 2G)}; \quad (28)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad (29)$$

$$\lambda + 2G = \frac{2(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad (30)$$

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}; \quad (31)$$

Уравнение (27) примет вид:

$$\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \times \frac{du_r}{dr} + \frac{\omega^2 \rho (1+\mu)(1-2\mu)r}{2(1-\mu)E} - \frac{u_z}{r^2} = 0. \quad (32)$$

При $\mu = \frac{1}{2}$ обращается в ноль инерционное слагаемое, что нежелательно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Колтунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел [Текст] : учеб. / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – М. : Высшая школа, 1975. – 526 с.
- 2 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.
- 3 Огарков, В. Б. Обобщенная плоская деформация равномерно-вращающегося изотропного упругого вала из несжимаемого материала [Текст] / В. Б. Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2018. – Т. 1. – № 1 (23). – С. 68-74.
- 4 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.
- 5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
- 6 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.
- 7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.
- 8 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.
- 9 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.
- 10 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.