УДК 621.371

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА МНОГОСЛОЙНОМ ШАРЕ

Колычев С.А.
Федеральное государственное казенное военное образовательное учреждение высшего образования «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации
E-mail: ksa22111951.km@yandex.ru

Аннотация: В работе предлагается возможный подход к решению задачи дифракции плоской электромагнитной волны на структуре из слоёв с границами раздела в виде концентрических сферических поверхностей. В основе подхода рекуррентные соотношения для коэффициентов отражения мод представления при поэтапном добавлении границ раздела слоёв структуры. Предложенный подход концептуально прост. В рамках этого подхода могут быть найдены рекуррентные соотношения для коэффициентов проницаемости многослойных сферических оболочек рассмотренной структуры, рекуррентные соотношения при её послойном формировании или формировании из нескольких многослойных оболочек.

Ключевые слова: слоистая среда, сферические границы раздела, электромагнитные поля, потенциалы волн электрического и магнитного типа, рекуррентные соотношения для коэффициентов отражения.

ON AN APPROACH TO SOLVING THE SCATTERING PROBLEM ON A MULTILAYER BALL

Colichev S.A.
Federal State Treasury Military Educational Institution of Higher Education «Military Training and Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin»» (Voronezh) of the Ministry of Defense of the Russian Federation
E-mail: ksa22111951.km@yandex.ru

Summary: A possible approach to solving the diffraction problem of a plane electromagnetic wave on a structure of layers with interfaces in the form of concentric spherical surfaces is proposed. The approach is based on the recurrence relations for the reflection coefficients of the representation modes during the phased addition of the boundaries of the structure layers. Within the framework of this approach, recurrence relations for the permeability coefficients of multilayer spherical shells of the considered structure, recurrence relations during its layer-by-layer formation or formation from several multilayer shells can be found.

Keywords: layered environment, spherical boundary, electromagnetic field, potentials of electric and magnetic type waves, recurrent relationships for reflection coefficients.

При теоретических оценках электродинамических характеристик многослойных экранов электромагнитных волн используется понятие входного импеданса волны на поверхности экрана [1]. В ранних изданиях цитируемой работы, относящейся к классике научных работ по электродинамике слоистых сред, говорится о входном импедансе волны, в переизданиях – о входном импедансе поверхности экрана. Фактически эта выглядящая несколько искусственной величина зависит как от параметров экрана, так и от параметров волны. При расчёте характеристик экрана вначале с использованием рекуррентных соотношений осуществляется расчёт входного импеданса от одной поверхности раздела его слоёв к другой до внешней поверхности экрана, на которую падает первичная волна. Затем по известному входному импедансу определяется коэффициент отражения этой волны от экрана и другие его характеристики. В работе [2] предложены прямые рекуррентные соотношения как для коэффициента отражения плоской волны от многослойного экрана, так и для коэффициента прохождения такой волны через этот экран. Вывод этих соотношений не опирается на понятие импеданса и основывается на простой физически прозрачной модели возбуждения экрана падающей плоской волной. В данной работе проводится обобщение данного подхода на случай многослойной среды с другой простой геометрией слоя.

Геометрическое и радиофизическое описание рассматриваемой среды сводится к следующему. Среда представляет собой находящуюся во внешнем пространстве структуру, состоящую из M однородных слоёв с границами раздела в виде концентрических сфер. Слои нумеруются натуральными числами (индекс m) в порядке перехода от внутри лежащих к внешним, от шара внутри всей структуры ($m = 1$) к внешней среде ($m = M + 1$). Особая точка в центре структуры тоже может рассматриваться как слой с индексом $m = 0$. Каждый слой и внешнее пространство характеризуются относительными в общем случае комплексными диэлектрической $\hat{\varepsilon}_m$ и магнитной $\hat{\mu}_m$ проницаемостями. Используется сферическая система координат (r,ϑ,φ) с началом отсчёта в общем центре сфер-границ раздела слоёв структуры, так что границы слоёв m и m+1 совпадают с координатной поверхностью $r = R_m^{m+1}$.

Поля в слоях могут быть представлены суперпозицией волн электрического (равная нулю радиальная компонента напряжённости магнитного поля) и магнитного (равная нулю радиальная компонента напряжённости электрического поля) типов [3]. Напряжённости полей этих волн в слое m выражаются через скалярные потенциалы ψ_m^e и ψ_m^h соответственно, представляющие собой единственные отличные от нуля радиальные компоненты электрического и магнитного векторных потенциалов:

$$\mathbf{E}_m^e = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}_m}\{(k_m^2\psi_m^e + \frac{\partial^2\psi_m^e}{\partial r^2})\mathbf{l}_r + \frac{\partial^2\psi_m^e}{r\partial\vartheta\partial r}\mathbf{l}_\vartheta + \frac{\partial^2\psi_m^e}{r\sin(\vartheta)\partial\varphi\partial r}\mathbf{l}_\varphi\};$$

$$\mathbf{H}_m^e = \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial\psi_m^e}{\partial\varphi}\mathbf{l}_\vartheta - \frac{\partial\psi_m^e}{\partial\vartheta}\mathbf{l}_\varphi) \tag{1}$$

и

$$\mathbf{E}_m^h = -\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial\psi_m^h}{\partial\varphi}\mathbf{l}_\vartheta - \frac{\partial\psi_m^h}{\partial\vartheta}\mathbf{l}_\varphi);$$

$$\mathbf{H}_m^h = -\frac{i}{\omega\mu_0\hat{\mu}_m}\{(k_m^2\psi_m^h + \frac{\partial^2\psi_m^h}{\partial r^2})\mathbf{l}_r + \frac{\partial^2\psi_m^h}{r\partial\vartheta\partial r}\mathbf{l}_\vartheta + \frac{\partial^2\psi_m^h}{r\sin(\vartheta)\partial\varphi\partial r}\mathbf{l}_\varphi\}. \tag{2}$$

Здесь $k_m = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\hat{\varepsilon}_m\hat{\mu}_m}$ – волновое число в слое m; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные (диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства).

При этом напряжённости полей в слое свободном от сторонних источников будут удовлетворять уравнениям Максвелла, если потенциалы удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\psi_m^{e(h)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\psi_m^{e(h)}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\psi_m^{e(h)}}{\partial\varphi^2}\right) + k_m^2\psi_m^{e(h)} = 0. \tag{3}$$

В работе [4] используются соответствующие потенциалы Дебая. Они удовлетворяют волновому уравнению и после умножения на модуль радиуса вектора r дают потенциалы Герца, используемые здесь. Поля в отдельных слоях составят поле структуры в целом, если тангенциальные к поверхностям раздела слоёв компоненты их напряжённостей будут непрерывны на этих поверхностях (граничные условия задач возбуждения электромагнитных колебаний в «кусочно» однородных средах). Из выражений (1) следует, что для волн электрического типа это будет иметь место, когда потенциал ψ_m^e удовлетворяет граничным условиям:

$$\psi_m^e(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi)=\psi_{m+1}^e(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi);\frac{1}{\hat{\varepsilon}_m}\frac{\partial\psi_m^e}{\partial r}(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\hat{\varepsilon}_{m+1}}\frac{\partial\psi_{m+1}^e}{\partial r}(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi). \quad (4)$$

Аналогичные соотношения для волн магнитного типа имеют вид

$$\psi_m^h(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi)=\psi_{m+1}^h(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi);\frac{1}{\hat{\mu}_m}\frac{\partial\psi_m^h}{\partial r}(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\hat{\mu}_{m+1}}\frac{\partial\psi_{m+1}^h}{\partial r}(R_m^{m+1},\vartheta,\varphi). \quad (5)$$

Переменные в уравнениях (3…5) разделяются и их решения могут быть представлены в виде разложения по ортогональным угловым модам (в ряд по сферическим гармоникам):

$$\psi_m^{e(h)}=r\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty}[(\hat{a}_m^{-e(h)}(l,n)h_n^{(1)}(k_m r)+\hat{a}_m^{+e(h)}(l,n)h_n^{(2)}(k_m r))\cos(l\varphi)+$$
$$(\breve{a}_m^{-e(h)}(l,n)h_n^{(1)}(k_m r)+\breve{a}_m^{+e(h)}(l,n)h_n^{(2)}(k_m r))\sin(l\varphi)]P_n^l(\cos(\vartheta)), \quad (6)$$

где $\breve{a}_m^{+e(h)}(l,n)$ – амплитуда нечётной по азимуту моды l, n электрического (магнитного) потенциала, распространяющейся в слое m от его нижней к его верхней границам (радиально расходящиеся моды); $\breve{a}_m^{-e(h)}(l,n)$ – амплитуда моды того же типа, распространяющейся в противоположном направлении (сходящиеся к центру структуры моды); $\hat{a}_m^{\pm e(h)}(l,n)$ – амплитуды аналогичных чётных по азимуту мод потенциалов полей в слое m; $h_m^{(1,2)}(x)$ – сферические функции Ханкеля; $P_n^l(x)$ – присоединённые полиномы Лежандра.

После подстановки выражения (6) в граничные условия (4, 5) можно, используя ортогональность сферических гармоник, получить соотношения между амплитудами мод в соседних слоях:

$$(a_m^{-e}(l,n)h_n^{(1)}(x)+a_m^{+e}(l,n)h_n^{(2)}(x))\Big|_{x=k_m R_m^{m+1}} = (a_{m+1}^{-e}(l,n)h_n^{(1)}(x)+a_{m+1}^{+e}(l,n)h_n^{(2)}(x))\Big|_{x=k_{m+1} R_m^{m+1}};$$

$$\frac{1}{\varepsilon_m}(a_m^{-e}(l,n)\frac{d(xh_n^{(1)}(x))}{dx}+a_m^{+e}(l,n)\frac{d(xh_n^{(2)}(x))}{dx})\Bigg|_{x=k_m R_m^{m+1}} = \frac{1}{\varepsilon_{m+1}}(a_{m+1}^{-e}(l,n)\frac{d(xh_n^{(1)}(x))}{dx}+a_{m+1}^{+e}(l,n)\frac{d(xh_n^{(2)}(x))}{dx})\Bigg|_{x=k_{m+1} R_m^{m+1}} \quad (7)$$

в случае мод электрического потенциала и

$$(a_m^{-h}(l,n)h_n^{(1)}(x)+a_m^{+h}(l,n)h_n^{(2)}(x))\Big|_{x=k_m R_m^{m+1}} = (a_{m+1}^{-h}(l,n)h_n^{(1)}(x)+a_{m+1}^{+h}(l,n)h_n^{(2)}(x))\Big|_{x=k_{m+1} R_m^{m+1}};$$

$$\frac{1}{\mu_m}(a_m^{-h}(l,n)\frac{d(xh_n^{(1)}(x))}{dx}+a_m^{+h}(l,n)\frac{d(xh_n^{(2)}(x))}{dx})\Bigg|_{x=k_m R_m^{m+1}} = \frac{1}{\mu_{m+1}}(a_{m+1}^{-h}(l,n)\frac{d(xh_n^{(1)}(x))}{dx}+a_{m+1}^{+h}(l,n)\frac{d(xh_n^{(2)}(x))}{dx})\Bigg|_{x=k_{m+1} R_m^{m+1}} \quad (8)$$

в случае мод магнитного потенциала. Граничные условия (7, 8) одинаковы для чётных и нечётных по азимуту мод представления потенциала, во всех таких случаях ниже в обозначениях амплитуд мод будут опускаться соответствующие знаки различия.

Если вынести за скобки в левой и правой частях граничных условий (8) $a_m^{-e}(l,n)h_n^{(1)}(x)$ и $a_{m+1}^{-e}(l,n)h_n^{(1)}(x)$, то полученная система линейных уравнений относительно этих величин будет иметь нетривиальное решение (равный нулю детерминант) при условии

$$\eta_{m,0;n}^{e} = \frac{\Xi_{m,m+1;n}^{(1,1)} + \Xi_{m,m+1;n}^{(2,1)} T_{m;n}^{(1)} T_{m;n}^{(2)} \eta_{m-1,0;n}^{e}}{1-\Xi_{m,m+1;n}^{(2,2)} T_{m;n}^{(1)} T_{m;n}^{(2)} \eta_{m-1,0;n}^{e}}, \quad (9)$$

где $T_{m;n}^{(1)} = \dfrac{h_n^{(1)}(k_m R_{m-1}^{m})}{h_n^{(1)}(k_m R_m^{m+1})}$ – фактор (пропагатор), описывающий распространение радиально сходящейся моды n – го порядка в слое m от внешней границы ($r = R_m^{m+1}$) к внутренней $r = R_{m-1}^{m}$; $T_{m;n}^{(2)} = \dfrac{h_n^{(2)}(k_m R_m^{m+1})}{h_n^{(2)}(k_m R_{m-1}^{m})}$ – аналогичный фактор, описывающий распространение радиально расходящейся моды от внутренней границы к внешней; $\eta^{e(h)}_{j,0;n} = \dfrac{a^{+e(h)}_{j+1}(l,n) h^{(2)}_n (k_{j+1} R^{j+1}_j)}{a^{-e(h)}_{j+1,n}(l,n) h^{(1)}_n (k_{j+1} R^{j+1}_j)}$ – отношение значений радиально расходящихся в слое j+1 мод n-го порядка в представлении (6) потенциала электрических (магнитных) волн к значениям соответствующих радиально сходящихся мод на границе между j и j+1 слоями;

$$\Xi^{(i,j)}_{m,m+1;n} = \frac{\sqrt{\dfrac{\hat{\mu}_m}{\hat{\varepsilon}_m}}\Theta^{(i)}_n(k_m R^{m+1}_m) - \sqrt{\dfrac{\hat{\mu}_{m+1}}{\hat{\varepsilon}_{m+1}}}\Theta^{(j)}_n(k_{m+1} R^{m+1}_m)}{\sqrt{\dfrac{\hat{\mu}_{m+1}}{\hat{\varepsilon}_{m+1}}}\Theta^{(2)}_n(k_{m+1} R^{m+1}_m) - \sqrt{\dfrac{\hat{\mu}_m}{\hat{\varepsilon}_m}}\Theta^{(1)}_n(k_m R^{m+1}_m)}; \quad \Theta^{(1,2)}_n(x) = \frac{d(x h^{(1,2)}_n(x))/dx}{x h^{(1,2)}_n(x)}.$$

Отношение $\eta^{e(h)}_{j,0;n}$ представляет собой коэффициент отражения радиально сходящейся моды $a^{-e(h)}_{m+1}(l,n) h^{(1)}_n (k_{m+1} r) P^l_n(\cos(\vartheta)) \begin{cases} \cos(l\varphi) \\ \sin(l\varphi) \end{cases}$, падающей из слоя j+1 на систему концентрических сферических слоёв с j границами раздела (между слоем j+1 и общим центром) с образованием отражённой расходящейся моды аналогичной угловой конфигурации $a^{+e(h)}_{m+1}(l,n) h^{(2)}_n (k_{m+1} r) P^l_n(\cos(\vartheta)) \begin{cases} \cos(l\varphi) \\ \sin(l\varphi) \end{cases}$.

Выражение (9) и его аналог для мод представления потенциала волн магнитного типа дают рекуррентные соотношения для расчёта коэффициентов отражения для структур с любым количеством слоёв. Оно может использоваться, начиная с $m=1$. При этом формально нужно положить $\eta^{e(h)}_{0,0;n} = -1$, а отношение $h^{(1)}_n(k_m R^1_0)/h^{(2)}_n(k_m R^1_0)$ в произведении пропагаторов $T^{(1)}_{1;n} T^{(2)}_{1;n}$ взять в пределе при $R^1_0 \to 0$ т.е. равным (–1). Рекуррентное соотношение (9) являются следствием уравнений свободных электромагнитных колебаний и граничных условий, которые сами по себе следствие этих же уравнений. Для того, чтобы использовать эти соотношения при решении задачи рассеяния (возбуждения) необходимо найти представления вида (6) для потенциалов волн электрического и магнитного типов, создаваемых соответствующими сторонними источниками токов в однородном пространстве. Возможность такого представления для произвольного распределения плотности электрического (магнитного) тока показана в работе [3]. При решении задачи рассеяния необходимы представления потенциалов, описывающих плоскую волну, падающую на рассматриваемую структуру из внешней среды ($m = M + 1$):

$$\psi_p^{(e)}(r,\vartheta) = \frac{E'}{Z_{M+1}}\cos(\varphi) r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n j_n(k_{M+1}r) P_n^1(\cos(\vartheta)) \text{ и}$$

$$\psi_p^{(h)}(r,\vartheta) = -E' r \sin(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n j_n(k_{M+1}r) P_n^1(\cos(\vartheta)). \quad (10)$$

Здесь $Z_j = \sqrt{\mu_0 \hat{\mu}_j / \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_j}$ – волновой импеданс материала слоя j, а E' – амплитуда колебаний напряжённости электрического поля распространяющейся в направлении противоположном направлению оси Z плоской волны, поляризованной вдоль оси X (оси отсчёта азимутального угла), $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя n – го порядка, появление которой связано со следующей особенностью описания полей в частотной области. При разложении поля в ряд по сферическим гармоникам (ряды (6, 10)) центр используемой сферической системы координат является точкой, в которой радиально расходящиеся и сходящиеся сферические моды имеют особенность. Поле в центре системы координат должно оставаться конечным, когда в нём нет источников поля типа элементарных излучателей (вообще нет «истоков» или «стоков» излучения). Это своего рода «математизированное» обоснование появления в указанных выражениях сочетания функций Ханкеля, соответствующего функции Бесселя. «Физичное» истолкование такого положения вещей связано с тем, что каждое гармоническое колебание из Фурье представления поля (комплексные амплитуды «синусоидальных» волн) бесконечно протяжённый во времени процесс и радиально сходящаяся в центр системы координат без «стоков» и «истоков» мода поля, проходя через него, всегда должна порождать соответствующую расходящуюся моду.

Можно искать выражения для потенциалов полного поля в виде сумм, первые слагаемые которых представляют собой части, составленные из радиально сходящиеся мод соответствующих потенциалов падающей волны, а вторые искомые дополнения этих частей до потенциалов полного поля. Эти последние дополнения должны содержать только радиально расходящиеся моды, поскольку источники их реальные или мнимые могут находиться только внутри слоёв с $m \le M$. Более того, при рассматриваемом случае возбуждения логично считать, что эти расходящиеся моды результат отражения сходящихся мод представления потенциалов падающей волны. Как следствие для потенциалов полного поля во внешней среде справедливы выражения:

$$\psi_{пл}^{(e)}(r,\vartheta)=\frac{E'}{Z_{M+1}}\cos(\varphi)r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1/2}{n(n+1)}i^nP_n^1(\cos(\vartheta))(h_n^{(1)}(k_{M+1}r)+$$
$$\eta_{M+1,0;n}^{e}\frac{h_n^{(1)}(k_{M+1}R_M^{M+1})}{h_n^{(2)}(k_{M+1}R_M^{M+1})}h_n^{(2)}(k_{M+1}r));$$
$$\psi_{пл}^{(h)}(r,\vartheta)=-E'r\sin(\varphi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1/2}{n(n+1)}i^nP_n^1(\cos(\vartheta))(h_n^{(1)}(k_{M+1}r)+$$
$$\eta_{M+1,0;n}^{h}\frac{h_n^{(1)}(k_{M+1}R_M^{M+1})}{h_n^{(2)}(k_{M+1}R_M^{M+1})}h_n^{(2)}(k_{M+1}r)). \tag{11}$$

Потенциалы рассеянного поля являются разностью соответствующих потенциалов полного (11) и падающего (10) полей. Традиционный подход, при котором поле в окружающей среде $m=M+1$ изначально описывается суммами соответствующих потенциалов падающей и рассеянной волн, а амплитуды их мод представления определяются из условий (7, 8) на внешней границе рассматриваемой структуры $r=R_M^{M+1}$, приводит более сложным путём к тому же результату.

Для полного решения задачи дифракции плоской волны на рассматриваемой структуре необходимо определить амплитуды мод представления потенциалов в её внутренних слоях. Возможны разные варианты соответствующих выражений. Из первых уравнений систем (7, 8) можно, например, получить рекуррентные соотношения:

$$a_m^{+e(h)}(l,n)h_n^{(2)}(k_mR_{m-1}^m)=\eta_{m-1,0;n}^{e(h)}a_m^{-e(h)}(l,n)h_n^{(2)}(k_mR_{m-1}^m);$$
$$a_m^{-e(h)}(l,n)h_n^{(1)}(k_mR_{m-1}^m)=\frac{T_{m;n}^{(1)}(1+\eta_{m,0;n}^{e(h)})}{1+\eta_{m-1,0;n}^{e(h)}T_{m;n}^{(1)}T_{m;n}^{(2)}}a_{m+1}^{-e(h)}(l,n)h_n^{(1)}(k_{m+1}R_m^{m+1}), \tag{12}$$

которые по значениям амплитуд мод представления потенциалом поля внешнего слоя ($a_{m+1}^{-e(h)}(1,n)$) получить значения амплитуд соответствующих мод в смежном с ним внутреннем слое ($a_m^{\pm e(h)}(l,n)$). Соотношения (12) применяются, начиная с $m=M$ (здесь $a_{M+1}^{-e}(1,n)=\frac{E'}{Z_{M+1}}\frac{n+1/2}{n(n+1)}i^n$; $a_{M+1}^{-h}(1,n)=-E'\frac{n+1/2}{n(n+1)}i^n$). На последнем этапе при $m=1$ нужно использовать соотношение $2a_1^{-e(h)}(1,n)j_n(k_1R_1^2)=(1+\eta_{1,0;n}^{e(h)})a_2^{-e(h)}(1,n)h_n^{(1)}(k_2R_1^2)$.

По потенциалам дифференцированием (2, 3) определяются напряжённости полей. Сложные обозначения и громоздкие выкладки при промежуточных преобразованиях не должны вводить в заблуждение. Предложенный подход концептуально прост. Представленные соотношения не охватывают возможности подхода полностью. В рамках этого подхода могут быть найдены рекуррентные соотношения для коэффициентов проницаемости многослойных сферических оболочек рассмотренной структуры, рекуррентные соотношения при её послойном формировании или формировании из нескольких многослойных оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах [Текст] / Л. М. Бреховских. – Москва : Изд-во АН СССР, 1957. – 502 с.

2 Колычев, С. А. Отражение электромагнитных волн от плоских многослойных экранов [Текст] / С. А. Колычев // Антенны. – М. : Изд. «Радиотехника», 2007. – № 8. – С. 3-6.

3 Марков, Г. Т. Возбуждение электромагнитных волн. [Текст] / Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин. – Москва : Изд-во Радио и связь, 1983. – 296 с.

4 Хёнл, Х. Теория дифракции [Текст] / Х. Хёнл, А. Мауэ. – Москва : Изд-во Мир, 1964. – 428 с.