УДК 537.8

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

Колычев С.А.

Федеральное государственное казенное военное образовательное учреждение высшего образования «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

E-mail: ksa22111951.km@yandex.ru

Аннотация: Представления о непрерывном распределении заряда (тока), востребовано, не вызывают проблем, когда речь идёт о линейных соотношениях. Несколько иначе обстоит дело в билинейных соотношениях, к которым относятся энергетические соотношения классической электродинамики. В работе предлагается подход к анализу энергетических соотношений классической электродинамики, который позволит более гибко подходить к анализу энергетики электромагнитных процессов.

Ключевые слова: распределение заряда, элементарные носители заряда, системы точечных зарядов, электромагнитные процессы, энергетические соотношения, классическая электродинамика

ON ENERGY RATIOS FOR A SYSTEM OF ELECTRIC CHARGES

Colichev S.A.

Federal State Treasury Military Educational Institution of Higher Education «Military Training and Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin»» (Voronezh) of the Ministry of Defense of the Russian Federation

E-mail: ksa22111951.km@yandex.ru

Summary: The concept of a continuous distribution of charge (current), is in demand, does not cause problems when it comes to linear relationships. The situation is somewhat different in bilinear relations, which include the energy relations of classical electrodynamics. The paper proposes an approach to the analysis of the energy relations of classical electrodynamics, which will allow a more flexible approach to the analysis of the energy of electromagnetic processes.

Keywords: charge distribution, elementary charge carriers, point charge systems, electromagnetic processes, energy relations, classical electrodynamics

В электростатике, как и в классической электродинамике в целом, для описания систем электрических зарядов используются две взаимодополняющие друг друга абстракции. Это точечный заряд, находящийся в одной единственной точке пространства, и заряд, непрерывно распределённый по некоторой пространственной области. Точечный заряд может взаимодействовать с окружающими его зарядами только как целое. И такое описание отражает известное свойство элементарных частиц, но «размещение» такой частицы в единственной точке пространства «квантово-механически» невозможно. В случае непрерывного распределения заряда каждая его часть взаимодействует с любой другой, а в случае выделения нескольких распределённых или точечных зарядов и с этими внешними зарядами и/или их частями. При этом заряд малой области в любой точке непрерывного распределения пропорционален объёму области. Такое описание удобно, когда речь идёт об усреднённых величинах по объёмам, в которых находятся огромные количества элементарных носителей заряда. Ясно, что в пределе малых объёмов и эта абстракция перестаёт передавать свойства реальных распределений зарядов. Таким образом, природных аналогов распределений зарядов со свойствами, в полной мере соответствующими какой-либо из указанных абстракций, нет.

Представления о непрерывном распределении заряда (тока) востребовано, главным образом, когда известна плотность этого распределения и нужно найти формируемое ей электрическое (магнитное, электромагнитное) поле. Переход к полям системы точечных зарядов можно получить, представив в общем решении плотность распределения соответствующей суммой «взвешенных» на величину зарядов δ-функций Дирака. Представление о точечном заряде востребовано, главным образом, при описании сил, действующих на заряды в известном электрическом (электромагнитном) поле. При этом в тех случаях, когда нужно установить силы, действующие на непрерывно распределённый заряд, принимается, что каждая элементарная ячейка этого заряда взаимодействует с полем как точечный заряд, величина которого равна произведению плотности заряда в месте расположения ячейки на её объём. Такие переходы от одной абстракции к другой не вызывают проблем когда речь идёт о линейных соотношениях. Несколько иначе обстоит дело в билинейных соотношениях, к которым относятся энергетические соотношения классической электродинамики.

Первой фазой вывода таких соотношений является определение энергии электростатического взаимодействия двух точечных зарядов

$$U_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|}, \tag{1}$$

где $q_{1(2)}$ – величины зарядов; $\mathbf{r}_{1(2)}$ – радиусы вектора пространственного положения зарядов; ε_0 - электрическая постоянная.

Эта энергия определяется как работа против электрических сил, которую необходимо затратить на перевод зарядов в места их расположения из гипотетического состояния, когда они бесконечно далеки друг от друга. Именно этому исходному состоянию приписывается нулевое значение потенциальной энергии рассматриваемой системы двух зарядов. Здесь необходимо подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, работа всегда связана с переводом из одного состояния в другое. Во-вторых, собственная энергия каждого из зарядов, которую можно было бы связать с их собственным электрическим полем, в этом случае как бы выпадает из поля зрения. Другими словами, заряды – данность исходного состояния системы, а как они возникли и какая работа против электрических сил потребовалась, чтобы их создать, полученным соотношением не оценивается. Она как бы включена в исходное состояние и находится вне перехода между ним и конечным состоянием системы.

Обобщение (1) на систему точечных зарядов приводит к выражению

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j;i\neq j} U_{i,j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j;i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j;i\neq j} q_i \varphi_j(\mathbf{r}_i), \tag{2}$$

описывающему попарное взаимодействие зарядов системы ($\varphi_j(\mathbf{r})$ – потенциал поля, создаваемого в точке $\mathbf{r}$ j-ым зарядом системы). Здесь также все заряды взаимодействуют как целое (исходные данности), а исходное состояние – бесконечная удалённость их друг от друга.

Далее практикуется переход от систем точечных зарядов к системе с непрерывным распределением заряда подменой величины заряда произведением плотности на элемент объёма, а суммы вкладов на интеграл по всему пространству [1-3]

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV_r = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \varphi(\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})dV_r = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \left(\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\right)dV_r\,. \tag{3}$$

Здесь пространственное расположение всей системы зарядов описывается плотностью распределения $\rho(\mathbf{r})$, электрический потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} dV_{\mathbf{r}'} \qquad (4)$$

и напряжённость электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ создаются этим же распределением заряда ($div(\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \rho(\mathbf{r}) / \varepsilon_0$).

Такого рода манипуляция не меняет физической модели, лежащей в основе оценки электростатической энергии теперь уже непрерывного распределения зарядов. Это, по прежнему, работа по переводу этого распределения из гипотетического исходного в то самое состояние, для которого собственно и проводится оценка. С учётом (4) исходное состояние здесь это состояние разнесенности всех мельчайших частиц распределения на бесконечные расстояния друг от друга. Кроме того, с учётом (3) эти мельчайшие частицы испытывают в ходе перевода их из бесконечности в место фактического расположения действие поля (силы), создаваемого (-ой) ими же при этом же их конечном положении.

Здесь следует заметить, что выражения (1, 2) и (3, 4) не являются эквивалентными. Действительно, перейти от выражений (3, 4) обратно к выражениям (1, 2) не представляется возможным. После подстановки в (3, 4) плотности распределения, описывающей систему точечных зарядов $\rho(\mathbf{r}) = \sum q_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$, интеграл (3) расходится (возникают «дурные» бесконечности).

Считается, что последнее выражение в цепочке равенств (3) указывает на то, что энергия распределена в пространстве повсюду, где напряжённость поля отлична от нуля. Следует заметить, что с не меньшим основанием можно, исходя из первого равенства этой цепочки, утверждать, что энергия электростатического взаимодействия распределена только в местах расположения заряда. По-видимому, цепочка равенств (3) связывает две разные формы выражений для электростатической энергии непрерывно распределённого заряда, использующие разные характеристики полей. Как ещё одно подтверждение неэквивалентности выражений (1, 2) и (3, 4) можно указать на то, что согласно (3) результат оценок U всегда больше нуля, тогда как энергия взаимодействия зарядов разного знака по (1) меньше нуля.

Принципиально разными в оценках электростатической энергии системы электрических зарядов по (2) и (3) являются исходные состояния с «нулевой» энергией. Вместо исходной «полной распылённости» заряда по бесконечно удалённым друг от друга областям для выражения (3) в выражении (2) это бесконечная удалённость отдельных уже сформированных целостностей – образований зарядов (в данном случае точечных).

Способ формирования распределения зарядов $\rho(\mathbf{r})$ перетаскиванием бесконечно малых порций заряда из бесконечности не лишён противоречий. Какой бы малой ни была бы порция перетаскиваемого заряда, она с её полем изначально уже существует, т.е. предполагается уже неким путём созданной, как в случае каждого из системы точечных зарядов при формировании их пространственной конфигурации. Только количественно эти порции в пределе становятся носителями исчезающе малого заряда (при соответствующем росте их общего числа), что создаёт иллюзию «сотворения» $\rho(\mathbf{r})$ как бы из ничего.

При оценке электростатической энергии взаимодействия системы образований непрерывно распределённых зарядов можно предложить альтернативу её «бесконечно распылённому» исходному состоянию. Она становится понятной из следующего простого примера формирования, можно сказать «сотворения», системы двух шаров одинакового радиуса, заряженных одинаковыми по величине зарядами разного знака, равномерно распределёнными по объёмам шаров. Пространственное совмещение этих шаров (их центров) с точки зрения электростатики аналогично свободному от зарядов пространству, т.е. естественному исходному состоянию с «нулевой энергией» вообще и для системы этих шаров в частности. При смещении центров шаров из этого исходного состояния в направлении их конечного положения возникают действующие на шары электрические силы взаимного притяжения. Если смещение центров превышает диаметр шаров, эти силы равны силам кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов

$$\mathbf{F} = -\frac{Q^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{5}$$

где Q – величина заряда каждого из шаров; $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ – радиусы векторы их центров (для определённости положительного и отрицательного соответственно).

Напряжённость электрического поля в силу линейности уравнений Максвелла определяется суммой напряжённостей, создаваемых в точке наблюдения каждым из шаров в отдельности. Для смещений, меньших диаметра шара (схема на рис. 1), сила, действующая на шар, будет суммой сил, действующих на элементы его части, оказавшейся после смещения вне оставшейся области наложения шаров. Поскольку внутренние силы взаимодействия элементов для каждой из этих частей компенсируют друг друга, сами они друг для друга остаются единственными источниками внешних воздействий. Фактически это сила воздействия на «выступающую» за пределы оставшейся области наложения шаров часть одного шара со стороны аналогичной «выступающей» части другого шара.

Сила воздействия на выделенный бесконечно малый элемент в «выступающей» части шара не изменится, если представить её как результат действия всего противоположно заряженного шара и области самого этого шара, соответствующей «перекрытию» смещённых шаров. Можно дополнить воздействие этой последней области до воздействия всего шара и вычесть воздействие на рассматриваемый элемент той «выступающей» части, к которой он относится. После суммирования сил действующих на все элементы «выступающей» части это последнее (вычитаемое) воздействия по уже упомянутой выше причине обнулится. При расчёте силы, действующей на один из шаров, можно, таким образом, считать, что каждый бесконечно малый элемент его «выступающей» части находится под суммарным воздействием и того и другого шара как целостных объектов[1]. Как следствие, для силы, действующей на «выступающую» часть шара справедливо выражение

$$\mathbf{F}_{\Omega} = \frac{3Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 a^3} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{a^3} - \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}'}{\left| \mathbf{R} - \mathbf{r}' \right|^3} \right) dV_R, \qquad (6)$$

где a – радиус шаров, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки приложения силы к бесконечно малому элементу области пространства Ω, занимаемой «выступающей» частью положительно заряженного шара.

Удобно воспользоваться цилиндрической системой координат, ось Z которой ориентирована по направлению смещения шаров (рис. 1). В силу симметрии отличной от нуля остаётся только z-компонента силы (6):

[1] При этом сила, реально действующая на элемент «выступающей» части шара, будет отличаться от той, которая фигурирует в таком расчёте. Содержательным будет результат для суммарной силы, действующей на всю «выступающую» часть шара.

$$F_{\Omega,z}(w)=\frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}\int_{\tilde{\Omega}}\left(\frac{z-w/2}{a^3}-\frac{z+w/2}{(\rho^2+(z+w/2)^2)^{3/2}}\right)\rho d\rho dz=$$
$$\frac{3Q^2w^2}{64\pi\varepsilon_0 a^4}\left(\frac{1}{6}\frac{w^2}{a^2}-1\right). \tag{7}$$

Здесь $\tilde{\Omega}$ – «меридиональное» сечение области Ω; w – смещение центров шаров.

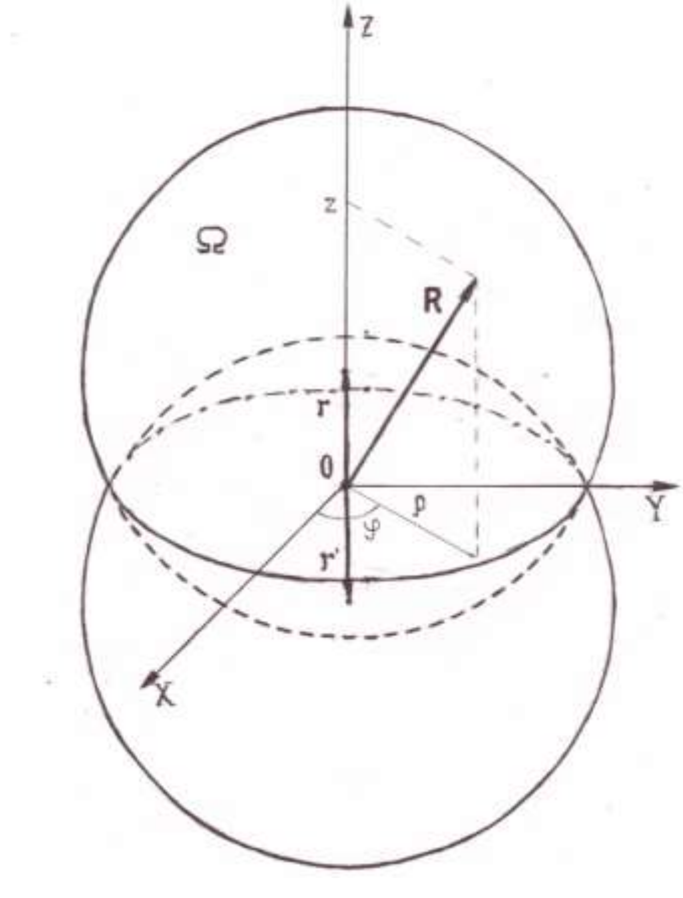

Рисунок 1 – Схема «перекрытия» смещённых заряженных шаров

Работа против электрических сил для разведения центров шаров на расстояние r оказывается, таким образом, равной

$$U_{sp}(r)=-\int_0^r F_{\Omega,z}(w)dw=\begin{cases}\dfrac{Q^2r^3}{64\pi\varepsilon_0 a^4}\left(1-\dfrac{1}{10}\dfrac{r^2}{a^2}\right),\ при\ r<2a;\\[2ex] \dfrac{Q^2}{\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{5a}-\dfrac{1}{4r}\right),\ при\ r\geq 2a\end{cases} \tag{8}$$

Работа против электрических сил (энергия), необходимая для пространственного разделения шаров ($r = 2a$) составляет

$$U_{sp} = 0.075\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a}. \tag{9}$$

Для полного освобождения шаров от взаимного влияния формально необходимо их разнесение на бесконечно большое расстояние. Работа против электрических сил в этом случае ($r = \infty$) составит

$$U_\infty = 0.2\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a}. \tag{10}$$

Половину этой величины можно трактовать как собственную электростатическую энергию одного шара. Величина этой же собственной энергии при формировании однородно заряженного шара того же радиуса «стаскиванием» бесконечно малых порций заряда из бесконечности оказывается в полтора раза большей [2].

Рассмотренная альтернатива состояния с «нулевой» энергией при формировании системы двух сходных по структуре образований заряда противоположного знака (системы «образование – «антиобразование») допускает обобщение на образования другой (не сферической) формы (в том числе с неоднородным распределением заряда по объёму образований) с соответствующим усложнением процедуры оценки сил действующих между образованием и «антиобразованием» при переводе их из исходного состояния наложения в конечные точки размещения. Для таких образований также могут быть проведены оценки работы против электрических сил при их пространственном разделении и полном отделении до «устранения» взаимодействия, а, кроме того, оценки собственной электростатической энергии образований.

В случае, когда не для каждого образования в рассматриваемой системе имеется «антиобразование» (или этих «антиобразований» вообще нет), каждое такое «непарное» образование совмещается в состоянии с «нулевой» энергией со своим «антиобразованием», как если бы эти дополнительные «антиобразования» входили в рассматриваемую систему образований изначально. Конечным местоположением таких дополнительных «антиобразований» назначается их бесконечная удалённость от местоположений образований рассматриваемой (исследуемой) системы. Полученное при таком подходе значение энергии электростатического взаимодействия представляет собой работу против электрических сил при описанном способе создания рассматриваемой системы образований и включает в себя составляющие, связанные с удалением дополнительных «антиобразований». В качестве энергии электростатического взаимодействия собственно рассматриваемой системы можно взять эту последнюю работу за вычетом собственных электростатических энергий удалённых дополнительно введённых «антиобразований».

Интересно отметить, что оба способа «создания» равномерно заряженного шара (приведенный здесь и описанный в [2]) при стремлении радиуса шара a к нулю (точечный заряд) дают для его собственной электростатической энергии расходящееся (бесконечно большое) значение. При этом в случае «стаскивания» заряда малыми порциями из бесконечности ([2]) расходимость обусловлена конечным состоянием системы - необходимостью бесконечно большой работы против электрических сил для «втискивания» конечного заряда в «точку» пространства. Тогда как в случае «растаскивания» расходимость обусловлена тем, что начальным состоянием при рассматриваемом предельном переходе оказывается состояние, в котором в одной точке пространства совмещены (уже «втиснуты») два конечных разноимённых заряда (т.е. состояние, которое можно было бы трактовать как состояние с бесконечно большой по величине отрицательной энергией).

Легко видеть, что после вычитания собственной энергии шаров (10) из выражения для работы по их полному разделению (8) указанный предельный переход ($a \to 0$) не вызывает проблем. При этом «нулевое значение» энергии приобретает состояние бесконечной удалённости центров шаров друг от друга. В области, в которой шары не перекрываются ($r \geq 2a$), энергия описывается выражением для энергии электростатического взаимодействия шаров как целостных образований заряда (разноимённых точечных зарядов), а область ($r < 2a$), в которой проявляется особенность механизма формирования этих образований заряда (шаров), в пределе исчезает (стягивается в точку).

Для того, чтобы избежать расходимостей в выражениях для электростатической энергии шаров при формировании их стаскиванием бесконечно малых порций заряда «из бесконечности» в работе [1] предлагается отбрасывать в конечных выражениях члены, ассоциируемые с собственной энергией шаров. Математически это тоже, что и выполненное выше вычитание работы против электрических сил, затраченной на формирование указанным способом и одного и второго шара. Физически это включение этой собственной энергии обоих шаров в исходное состояние с нулевой энергией и сведение оценки электростатической энергии системы шаров к работе против электрических сил при переводе шаров как целостных образований заряда из бесконечности в места их конечного расположения.

Приведенные рассуждения указывают на то, что добиться эквивалентности энергетических соотношений электростатики при использовании обоих форм абстрактного описания электрического заряда (избежать «дурных» бесконечностей) можно, изначально выделить те зарядовые образования, которые являются самостоятельными компонентами рассматриваемого взаимодействия, т.е. участвуют в нём как целостности. Для системы точечных зарядов каждый её заряд является таким образованием. Для непрерывно распределённых зарядов такое образование может представлять собой определённую часть распределения, несущую самостоятельную смысловую нагрузку в конфигурации электростатической системы, энергия взаимодействия которой определяется[2]. Затем, уточнить ту начальную конфигурацию выделенных образований заряда, которая принимается в качестве состояния с «нулевой» энергией. Например, состояние бесконечной удалённости образований друг от друга. Наконец, провести расчёты работы против электрических сил при переводе системы образований из конфигурации с «нулевой» энергией в конфигурацию, для которой проводится оценка энергии электростатического взаимодействия.

Пусть есть система из N таких образований заряда с плотностями распределения $\rho_i(\mathbf{r})$ (i от 1 до N). Тогда энергия электростатического взаимодействия при традиционном выборе исходной конфигурации системы образований («бесконечная разобщённость») описывается выражением

[2] Выше это были шары с непрерывно распределёнными по объёму зарядами при оценке энергии их взаимодействия между собой.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j;i\neq j}\int \rho_i(\mathbf{r})\varphi_j(\mathbf{r})dV_r =$$
$$\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i,j;i\neq j}\int \varphi_j(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}_i(\mathbf{r})dV_r = \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i,j;i\neq j}\int \left(\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\right)dV_r, \tag{11}$$

где $\varphi_j(\mathbf{r})$ – потенциал, а $\mathbf{E}_j(\mathbf{r})$ – напряжённость поля, создаваемого *j*-ым образованием заряда в точке $\mathbf{r}$.

Выражения (11) могут рассматриваться как обобщение (2) на случай непрерывно распределённых зарядов. Эти выражения допускают обратный переход от описания с использованием представления о непрерывном распределении заряда в образованиях к системе точечных зарядов. Для такого перехода достаточно подставить в первое равенство (11) $\rho_i(\mathbf{r}) = q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$. Новым может считаться вытекающее из этого обратного перехода равенства

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i,j;i\neq j}\int \left(\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\right)dV_r = \frac{1}{2}\sum_{i,j;i\neq j} q_i\varphi_j(\mathbf{r}_i) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j;i\neq j}\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|},$$

справедливые для системы точечных зарядов.

По имеющимся на сегодняшний день представлениям электрон не обладает внутренней структурой, поэтому выражение (10) может использоваться для оценки характерного размера (эффективного радиуса) электрона. При такой оценке U_∞ в этом выражении должна равняться минимальной энергии, необходимой для создания электрона и позитрона, т.е. удвоенной массе покоя электрона, умноженной на скорость света в квадрате или $2m_ec^2$. Как следствие эффективный радиус электрона (позитрона) должен равняться

$$a = 0.1\frac{q_e^2}{\pi\varepsilon_0 m_e c^2}, \tag{12}$$

где q_e – заряд электрона.

Подставляя в (9) заряд электрона и его радиус из (12) можно оценить характерную величину флуктуаций энергии при возникновении «виртуальных» электрон – позитронных пар, которая оказывается равной трём четвертям энергии покоя электрона.

Основное отличие изложенного подхода к анализу энергетических соотношений классической электродинамики от традиционного состоит в том, что он позволяет выделить нужные части системы и сосредоточиться на их взаимодействии, абстрагируясь от того каким образом преодолевались силы электромагнитного характера при создании самих этих частей. Адекватный решаемым задачам выбор системы образований зарядов, соотношения (11) и его динамические аналоги [4] позволяют более гибко подходить к анализу энергетики электромагнитных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Джексон, Дж. Классическая электродинамика [Текст] / Дж. Джексон. – Москва : «Мир», 1965. – 703 с.

2 Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм [Текст] / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс. – Москва : Изд-во Мир, 1966. – Вып. 5. – 296 с.

3 Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика [Текст] / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс. – Москва : Изд-во Мир, 1966. – Вып. 6. – 336 с.

4 Камалова, Н. С. Об одной форме закона сохранения энергии для системы электрических зарядов [Текст] / Н. С. Камалова, С. А. Колычев // Антенны. – М. : Изд. «Радиотехника», 2017. – № 7. – С. 62 – 66.