УДК 517.3

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Сапронов И.В., Спирина Н.М., Зенина В.В.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
E-mail: nadspi@yandex.ru

Аннотация: Статья посвящена исследованию решений интегральных уравнений. В теоремах приводятся различные достаточные условия для существования и единственности решения интегрального уравнения.

Ключевые слова: Интегральное уравнение, приближенное решение, равномерная непрерывность, предел, подпоследовательность.

CONDITIONS FOR EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE INTEGRAL EQUATION

Sapronov I.V., Spirina N.M., Zenina V.V.
Federal State Budgetary Education Institution of Higher Education «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»
E-mail: nadspi@yandex.ru

Summary: The article is devoted to the study of solutions of integral equations. The theorems give various sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the integral equation.

Keywords: Integral equation, approximate solution, uniform continuity, limit, subsequence.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(t, v, x(v))dv \ . \qquad (1)$$

Пусть функция $F(t, v, x)$ в $R = [0, T] \times [0, T] \times [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t>t_1}\int_0^t F(t,v,x(v))dv=\int_0^{t_1} F(t_1,v,x(v))dv \qquad (0\le t_1\le T)\ , \tag{2}$$

при всех $x(t)$, таких, что $\left|x(t)-x_0\right|\le\varepsilon$; а также функция $F(t, v, x)$ почти при всех v непрерывна по t, x, измерима по v при фиксированном t и

$$\left|F(t,v,x)\right|\le z(t,v)\,, \tag{3}$$

а функция $Z(t,u)=\int_0^t z(u,v)dv$ является непрерывной.

Теорема 1. Пусть функция $F(t, v, x)$ определена и непрерывна в R, удовлетворяет условию (2) и

$$AT\le\varepsilon,\quad A=\max_{(t,v,x)\in R}\left|F(t,v,x)\right|\ . \tag{4}$$

Тогда существует хотя бы одно решение интегрального уравнения (1), определенное на отрезке $[0, T]$.

Доказательство.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на n частей и построим последовательно приближенные решения уравнения (1):

$$x_n(t)=x_0,\ \text{если } 0\le t\le\frac{T}{n}\quad \text{и}$$

$$x_n(t)=x_0+\int_0^{t-\frac{T}{n}} F\left(t,v,x_n(v)\right)dv,\ \text{если } \frac{T}{n}\le t\le T,\ n=1,2,...$$

Множество функций $x_n(t)$ равномерно ограничено, так как из условия (4) следует, что $\left|x_n(t)-x_0\right|\le\varepsilon$.

Пусть $t_1\in[0;T]$ и $t_2\in[0;T]$. Тогда

$$\left|x_n(t_1)-x_n(t_2)\right|\le\int_0^{t_1-\frac{T}{n}}\left(F\left(t_1,v,x_n(v)\right)-F\left(t_2,v,x_n(v)\right)\right)dv+$$

$$+\left|\int_{t_1-\frac{T}{n}}^{t_2-\frac{T}{n}} F\left(t_2,v,x_n(v)\right)dv\right|\le\int_0^{t_1}\left|F\left(t_1,v,x_n(v)\right)-F\left(t_2,v,x_n(v)\right)\right|dv+z\left|t_1-t_2\right|$$

Так как по условию теоремы функция $F(t, v\ x)$ удовлетворяет условию (2) и

$$\left|x_n(t_1)-x_n(t_2)\right|\le z\left|t_1-t_2\right|+\int\limits_0^{t_1}\left|F\left(t_1,v,x_n(v)\right)-F\left(t_2,v,x_n(v)\right)\right|dv,$$

то получаем, что множество функций $x_n(t)$ равностепенно непрерывно.

Рассмотрим подпоследовательность

$$x_{n_k}(t)=x_0+\int\limits_0^{t-\frac{T}{n_k}}F(t,v,x_{n_k}(v))dv. \quad (5)$$

Из равностепенной непрерывности функции $x_n(t)$ следует, что последовательность $x_{n_k}(t)$ сходится к некоторой функции $x(t)$. Перейдем к пределу при $k\to\infty$ в (5). Получаем

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^{t}F\left(t,v,x(v)\right)dv,$$

то есть $x(t)$ является решением уравнения (1). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция $F(t, v, x)$ определена в R, удовлетворяет условиям (2), (3);

$$z(t,s)\le\varepsilon,\ \ (0\le s\le T)\ . \quad (6)$$

Тогда существует решение уравнения (1), определенное на отрезке $[0, T]$.

Доказательство.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на n частей и построим последовательно приближенные решения уравнения (1):

$$x_n(t)=x_0,\ \text{если } 0\le t\le\frac{T}{n}\quad \text{и}$$

$$x_n(t)=x_0+\int\limits_0^{t-\frac{T}{n}}F\left(t,v,x_n(v)\right)dv,\ \text{если } \frac{T}{n}\le t\le T,\ n=1,2,...$$

Из условия (6) следует, что $\left|x_n(t)-x_0\right|\le\varepsilon$, то есть множество функций $x_n(t)$ равномерно ограничено.

Также из условий теоремы следует, при $t_1,t_2\in[0;T]$:

$$\left|x_n(t_1)-x_n(t_2)\right|\le\left|\int_0^{t_1-\frac{T}{n}}F\left(t_1,v,x_n(v)\right)dv-\int_0^{t_2-\frac{T}{n}}F\left(t_2,v,x_n(v)\right)dv\right|+$$

$$+\left|\int_{t_1-\frac{T}{n}}^{t_2-\frac{T}{n}}F\left(t_2,v,x_n(v)\right)dv\right|\le\int_0^{t_1}\left|F\left(t_1,v,x_n(v)\right)-F\left(t_2,v,x_n(v)\right)\right|dv+$$

$$+z\left(t_2-\frac{T}{n},t_2\right)-z\left(t_1-\frac{T}{n},t_1\right)$$

Функция $z(t, s)$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике, следовательно, она равномерно непрерывна на этом прямоугольнике, и, следовательно, учитывая последнее неравенство, получаем равностепенную непрерывность множества функций $x_n(t)$. Из этого следует, что существует подпоследовательность функций $x_{n_k}(t)$, которая при $k\to\infty$ равномерно сходится к некоторой функции $x(t)$:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{t-\frac{T}{n_k}}F\left(t,v,x_{n_k}(v)\right)dv=\int_0^{t}F\left(t,v,x(v)\right)dv=x(t),$$

то есть *x(t)* является решением уравнения (1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва : Мир, 1970. – 720 с.

2 Miller, P. K. Nonlinear Volterra integral equations / P. K. Miller. – Benjamin, Menlo Park, CA, 1971. – 468 p.

3 Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра I-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 4. – С. 772-774.

4 Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 2. – С. 268-271.

5 Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журнал выч. мат. и мат. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970-988.

6 Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equation with regular

singularity / S.G. Krein, I.V. Sapronov // Укр. мат. ж. – 1997. – Т. 49. – № 3. – С. 424-432.

7 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2011. – № 1. – С. 59-71.

8 Спирина, Н. М. Задача Коши для частично гиперболических операторов с переменными коэффициентами / Н. М. Спирина, И. В. Сапронов, К. С. Королева // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы международной научно-методической конференции. – Воронеж : Научная книга, 2015. – С. 156.

9 Спирина, Н. М. Краевая задача для вырождающегося внутри и на области эллиптического уравнения / Н. М. Спирина, И. В. Сапронов, П. Н. Зюкин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11, ч. 4. – С. 581.

10 Спирина, Н. М. Приближенный метод решения задачи Коши в прямоугольнике / Н. М. Спирина, С. С. Веневитина, Е. В. Раецкая // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. – Воронеж, 2017. – Т. 5, № 8-1. – С. 300-303.

11 Спирина, Н. М. Условия знакопостоянства решения задачи Коши / Н. М. Спирина, С. С. Веневитина, Е. В. Раецкая // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. – Воронеж, 2018. – Т. 6, № 6. – С. 349.

12 Спирина, Н. М. Об одном решении операторного уравнения с запаздывающим аргументом / Н. М. Спирина, И. В. Сапронов, С. С. Веневитина // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. – Воронеж, 2018. – Т. 6, № 6. – С. 349-350.