УДК 517.951+517.955

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Усков В.И.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»

E-mail: vum1@yandex.ru

Аннотация: Рассматривается уравнение в частных производных первого порядка, заданное в банаховом пространстве. Получено решение задачи Коши для скалярного аналога. Далее, исследуется частный случай операторного коэффициента, имеющего собственные значения единичной алгебраической кратности. Затем рассматривается задача Коши с произвольным ограниченным операторным коэффициентом. Во всех случаях получена аналитическая формула решения.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, первый порядок, банахово пространство, задача Коши, скалярное уравнение, решение.

SOLUTION OF A FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN A BANACH SPACE

Uskov V.I.

Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»

E-mail: vum1@yandex.ru

Summary: We consider the first-order partial differential equation given in a Banach space. A solution of Cauchy problem for a scalar analogue of this problem is received. Next, we investigate a special case of an operator coefficient that has eigenvalues of unit algebraic multiplicity. Then we consider the Cauchy problem with an arbitrary bounded operator coefficient. In all cases, the analytical solution formula is obtained.

Keywords: partial differential equation, first order, Banach space, Cauchy problem, scalar equation, solution.

Введение

Рассматривается уравнение на множестве $\Pi = [0, X] \times [0, Y]$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + D\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y), \tag{1}$$

где D – ограниченный стационарный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E.

Уравнение (1) возникает в теплотехнике (например, конвективный теплообменник) [1], в электродинамике (электрические цепи), в гидродинамике (уравнения Навье-Стокса) [2] и т.д.

Поставим задачу Коши для уравнения (1):

$$u(0, y) = \varphi(y) \in E, \quad y \in [0, Y]. \tag{2}$$

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(x, y)$, дифференцируемая по x при каждом $y \in [0, Y]$ и по y при каждом $x \in [0, X]$ и удовлетворяющая (1), (2).

В настоящей работе в п. 1 рассматривается скалярный аналог задачи (1), (2). В п. 2 исследуется однородное уравнение для уравнения (1) в частном случае оператора D, имеющего собственные значения единичной алгебраической кратности. В п. 3 результат иллюстрируется примером. В п. 4, результаты, полученные в п. 1, переносятся на операторный аналог уравнения. Для этого применяется функция от оператора, составленная с помощью интеграла Коши. Во всех случаях получена аналитическая формула решения.

Результаты могут применяться при регуляризации уравнения с необратимым оператором при производной:

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y).$$

Отметим, что задача для этого уравнения исследовалась в работе [3] в случае A, B, задаваемых числовыми матрицами, при наложении очень жестких условий вырожденности: $\det A = \det B = \det(\lambda A + B) = 0, \forall \lambda$.

Начально-краевая задача для уравнения такого вида с оператором A, обладающим свойством иметь число 0 нормальным собственным числом [4], была решена в [5].

1. Решение задачи Коши для скалярного уравнения

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \tag{3}$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \tag{4}$$

где $a = \mathrm{const}$, $\varphi(y)$, $f(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции; $(x, y) \in \Pi = [0, X] \times [0, Y]$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Решение задачи* (3), (4) *равно*

$$u(x, y) = \varphi(y - ax) + \int_0^x f(s, y - ax + as)ds. \tag{5}$$

Доказательство. Сделав в уравнении (3) и условии (4) характеристические замены

$$\xi = x, \quad y = \eta + a\xi,$$

получим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi, \eta + a\xi),$$

$$u(0, \eta) = \varphi(\eta).$$

Ее интеграл равен

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \int_0^{\xi} f(s, \eta + as)ds,$$

откуда, сделав обратные замены, получим формулу (5). Теорема доказана.

2. Решение задачи Коши для однородного уравнения в банаховом пространстве в частном случае

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6}$$

Исследуется случай: ограниченный оператор D имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ алгебраической кратности 1. Пусть собственные векторы $h_1, h_2, \ldots, h_n$ отвечают этим собственным значениям.

Поставим задачу Коши для этого уравнения:

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y) h_k. \tag{7}$$

Имеет место следующая теорема [5].

Теорема 2. *Решение задачи* (6), (7) *равно*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y+\lambda_k x)h_k. \tag{8}$$

Доказательство. Применим к уравнению (6) невырожденное преобразование подобия $u = Kv$ [6]:

$$\frac{\partial Kv}{\partial x} = D\frac{\partial Kv}{\partial y}; \quad K\frac{\partial v}{\partial x} = DK\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = K^{-1}DK\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Здесь оператор $K^{-1}DK$ имеет жорданову форму [4]; следовательно, уравнение (6) сводится к системе уравнений вида (3):

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \lambda_k \frac{\partial v_k}{\partial y}, \qquad k = 1,2,\dots,n,$$

решение которой равно

$$v_k(x,y) = g_k(y+\lambda_k x),$$

где g_k – некоторые скалярные непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных функции.

Отметим, что v_k – это частное решение уравнения (6), отвечающее собственному значению λ_k.

Общее решение уравнения (6) – это сумма частных решений:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} g_k(y+\lambda_k x)h_k. \tag{9}$$

Взяв в (9) $x = 0$ и приравняв к (7), получим искомое утверждение. Теорема доказана.

В справедливости теоремы нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (8) в (6), (7).

3. Пример

Рассмотрим систему, заданную на множестве П:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 2\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 2\frac{\partial u_1}{\partial y} + 3\frac{\partial u_2}{\partial y}. \end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) – это уравнение вида (6) с искомой вектор-функцией $u(x,y) = \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix}$, $u_k(x,y) \in C^1(\Pi)$, $k = 1,2$, оператором $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Собственные значения оператора D равны $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4$; собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям равны $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Поставим задачу Коши для системы (10):

$$u_1(0,y) = -\sin y + y,$$
$$u_2(0,y) = \sin y + 2y.$$

Формула (9) приводит к решению:

$$u_1(0,y) = -\sin(y+x) + y + 4x,$$
$$u_2(0,y) = \sin(y+x) + 2(y+4x).$$

4. Решение начальной задачи для уравнения в банаховом пространстве

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + D\frac{\partial u}{\partial y} = F(x,y), \tag{11}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad y \in [0,Y], \tag{12}$$

где $D: E \to E$ – ограниченный стационарный линейный оператор, E – банахово пространство, $\overline{\operatorname{dom} D} = E$, $\varphi(y), F(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции со значениями в E; $(x,y) \in \Pi$.

Имеет место следующая теорема [7].

Теорема 3. *Пусть*

$$R(\mu,s) = ((y-\mu)I - (x-s)D)^{-1}$$

и Г – замкнутый спрямляемый жорданов контур, охватывающий спектр оператора $\mathrm{yI} - (\mathrm{x}-\mathrm{s})\mathrm{D}$, $\mathrm{s} \in [0,\mathrm{X}]$. Тогда решение задачи (11), (12) равно

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R(\mu,0)\varphi(\mu)\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\int_0^x R(\mu,s)F(s,\mu)\,ds\,d\mu,$$

где первое слагаемое – частное решение однородной задачи, а второе слагаемое – частное решение неоднородной задачи.

Доказательство. Перейдем от задачи (3), (4) к задаче (11), (12), сопоставив

$$a \mapsto D, \quad f(x,y) \mapsto F(x,y), \quad x \mapsto xI, \quad y \mapsto yI, \quad \mu \mapsto \mu I,$$

где I – единичный оператор.

Использовав функцию от оператора, построенной с помощью интеграла Коши [8]:

$$G(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R(\mu)G(\mu)\, d\mu$$

и применив теорему 1, получим искомое утверждение. Теорема доказана.

В справедливости этой формулы нетрудно убедиться подстановкой, применив формулу дифференцирования обратного оператора [8]:

$$(A^{-1}(t))' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

Результаты в п. 1 и 4 получены совместно с научным руководителем д. ф.-м. н. С. П. Зубовой по кандидатской диссертации автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Аветисян, А. Р. Теплогидравлические модели оборудования электрических станций / А. Р. Аветисян, А. Ф. Пащенко, Г. А. Пикина, Г. А. Филиппов. – Москва : Физматлит, 2013. – 448 с.

2 Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 3-50.

3 Нгуен, Х. Д. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х. Д. Нгуен, В. Ф. Чистяков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия : Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 98-111.

4 Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1965. – 448 с.

5 Зубова, С. П. Решение полуграничной задачи для вырожденного уравнения в частных производных первого порядка / С. П. Зубова, А. Х. Мохамад, В. И. Усков // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 173. – С. 48-57.

6 Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Физматлит, 2004. – 560 с.

7 Усков, В. И. Решение уравнения в частных производных первого порядка с операторным коэффициентом / В. И. Усков // Материалы XVII молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2018». – Казань : Изд-во Казанского матем. общ-ва, Изд-во Академии наук РТ, 2018. – Т. 56. – С. 292-293.

8 Усков, В. И. Решение уравнения в частных производных первого порядка в банаховом пространстве / В. И. Усков // Материалы IV Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», посвященной 95-летию член-корреспондента АН БССР Е. А. Иванова. – Минск, 2019. – С. 60-61.

9 Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1967. – 464 с.