

УДК 539. 3/6

РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ
КОНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Огарков В.Б., Аксенов А.А., Малюков С.В.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»

E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Аннотация: Выполнен расчет на прочность упругого стержня конического профиля из древесины дуба. Получены графики зависимости.

Ключевые слова: упругий стержень конического профиля, нормальное и касательное напряжения, прочность стержня.

CALCULATION FOR STRENGTH OF ELASTIC ROD OF
THE CONICAL PROFILE DURING BEND

Ogarkov V.B., Aksenov A.A., Malyukov S.V.

Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Voronezh State
University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»

E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Summary: The strength calculation of the elastic rod of a conic profile made of oak wood is made. Received dependency graphs.

Keywords: elastic rod of a conic profile, normal and tangential stress, rod strength.

Рассматривается задача прямого поперечного изгиба упругого стержня конического профиля. Величины нормального и касательного напряжений в произвольном поперечном сечении находятся по следующим формулам [1-15]:

$$\sigma = \frac{\mu y}{I_z}; \quad \tau = \frac{4Q}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right). \quad (1)$$

Поскольку стержень конического профиля имеет переменную по длине жёсткость, то формулы (1) использованные по аналогии с расчётом стержня прямоугольного поперечного сечения с переменной высотой по его длине [1, 16-28].

Исключим переменную y из соотношений (1):

$$\tau + \frac{4QI_z^2}{3\pi R^4 \mu^2} = \frac{4Q}{3\pi R^2}. \quad (2)$$

Для сплошного круга имеем:

$$2I_z = I_p = \frac{\pi D^4}{32}; \quad I_z = \frac{\pi(2R)^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (3)$$

$$\tau + \frac{Q\pi R^4}{12\mu^2} \sigma^2 = \frac{4Q}{3\pi R^2}. \quad (4)$$

Соотношение (4) представляет собой уравнение параболы в осях (τ, σ) .

$$\text{При } \sigma = 0: \tau = \frac{4Q}{3\pi R^2}; \text{ при } \tau = 0: \sigma_{1,2} = \pm \frac{4\mu}{\pi R^3}. \quad (5)$$

В соответствии с третьей и четвёртой теориями прочности:

$$\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} \leq \sigma_{adm}; \quad \sqrt{(\sigma^2 + 3\tau^2)} \leq \sigma_{adm}, \quad (6)$$

$$\sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_{adm}^2; \quad \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_{adm}^2. \quad (7)$$

В предельном случае равенства соотношения (7) представляют собой уравнения эллипсов в осях (τ, σ) .

Приведём эти соотношения к нормальному виду:

$$\left(\frac{\sigma}{1}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{0,5}\right)^2 = \sigma_{adm}^2; \quad \left(\frac{\sigma}{1}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)^2 = \sigma_{adm}^2. \quad (8)$$

Изобразим эллипсы (8) и параболу (4) на одном рисунке (рис. 1).

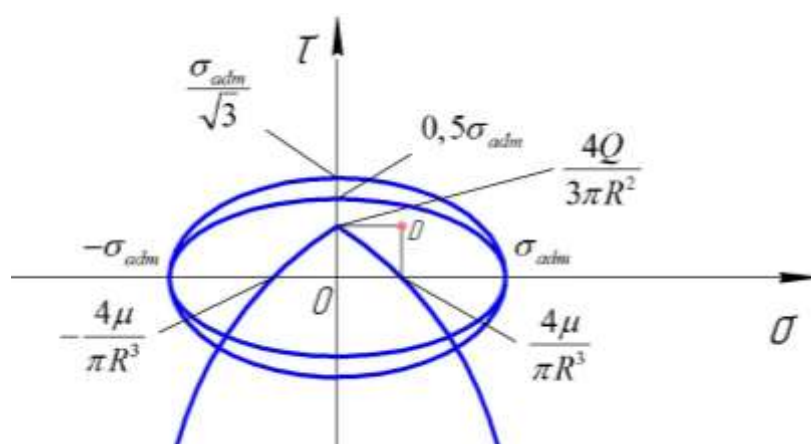


Рисунок 1 – Графики эллипсов и параболы

Рассмотрим упругий стержень конического профиля под действием сосредоточенной силы p на его левом конце и закрепленный на правом конце (рис. 2).

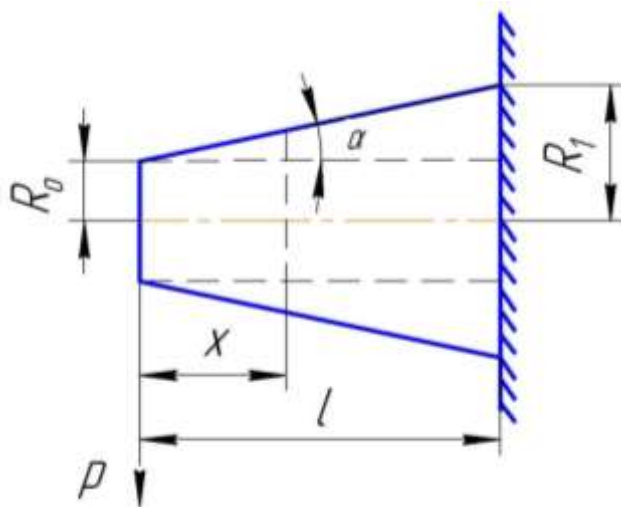


Рисунок 2 – Стержень конического профиля под действием сосредоточенной силы p

$$R(x) = R_0 + tg(\alpha)x. \quad (9)$$

Если парабола (4) находится внутри эллипсов прочности (8) для всех значений $0 \leq x \leq l$, то будут выполняться условия полной прочности стержня. Для этого должны выполняться следующие неравенства:

$$\frac{4|Q|}{3\pi R^2} \leq 0,5\sigma_{adm}; \quad \frac{4|\mu|}{\pi R^3} \leq \sigma_{adm}. \quad (10)$$

Для стержня, изображённого на рисунке 2:

$$Q = p; \quad |\mu| = px, \quad (0 \leq x \leq l). \quad (11)$$

Для стержня конического профиля:

$$\frac{4p}{3\pi(R_0+tg(\alpha)x)^2} \leq 0,5\sigma_{adm}; \quad \frac{4px}{\pi(R_0+tg(\alpha)x)^3} \leq \sigma_{adm}. \quad (12)$$

Левая часть первого неравенства (12) максимальна при $x = 0$:

$$\frac{4p}{3\pi R_0^2} \leq 0,5\sigma_{adm}. \quad (13)$$

Второе неравенство (12) запишем так:

$$x \leq \frac{\sigma_{adm}\pi}{4p} (R_0 + tg(\alpha)x)^3. \quad (14)$$

Рассмотрим стержень конического профиля из древесины дуба (ветвь дубового дерева) со следующими размерами:

$$R_0 = 0,035 \text{ м}; R_1 = 0,04 \text{ м}; l = 1,5 \text{ м}; p = 200 \text{ Н}; \sigma_{adm} = 1300 \cdot 10^4 \text{ Па}. \quad (15)$$

$$tg\alpha = 0,03; x \leq 5,1 \cdot (0,035 + 0,003x)^3 \cdot 10^4. \quad (16)$$

Построим графики функций, стоящих слева и справа в неравенстве (16) (рис. 3).

$$0 < 2,186; \quad 1,5 < 3,14$$

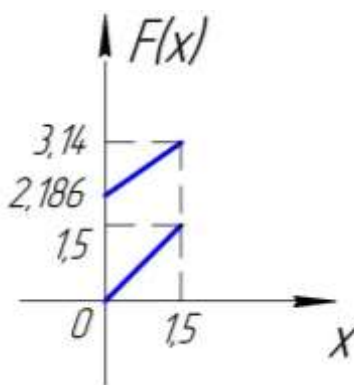


Рисунок 3 – Графики функций

Таким образом, неравенство (14) выполняется для всех x от нуля до 1,5 м. Отметим, что кубическая парабола, стоящая в правой части неравенства (14) имеет положительную монотонно возрастающую производную для всех значений x (рис. 3).

Рассмотрим положение точки D (рис. 1).

Найдём значение абсциссы эллипса прочности при ординате

$$\tau = \frac{4p}{3\pi(R_0 + tg(\alpha)x)^2}.$$

$$\sigma^2 = \sigma_{adm}^2 - 4 \left[\frac{4p}{3\pi(R_0 + tg(\alpha)x)^2} \right]^2. \quad (17)$$

Правая часть соотношения (17) монотонно возрастает при увеличении x . Она принимает минимальное значение при $x = 0$:

$$\sigma_{min} = \sqrt{\left[\sigma_{adm}^2 - \frac{64p^2}{9\pi^2(R_0)^4} \right]}. \quad (18)$$

Для стержня из древесины дуба, Па:

$$\sigma_{min} = \sqrt{[169 \cdot 10^{36} - 0,077 \cdot 10^{12}]} = 1300 \cdot 10^4, \quad (19)$$

отсюда следует, что абсцисса точки D (рис. 1) меньше значения эллипса прочности при $\tau = \frac{4p}{3\pi R_0^2}$.

Ввиду того, что производная от функции τ в формуле (4) монотонно убывает при увеличении σ , сохраняя знак величины, то можно сделать вывод о том, что парабола (4) лежит внутри прямоугольника и эллипса прочности (7).

Из неравенств (10) видно, что увеличение угла α приводит к стягиванию параболы (4) к центру системы координат (τ, σ) и увеличению прочности стержня, что соответствует физическому смыслу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 676 с.
- 2 Колтунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел [Текст] : учеб. / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – М. : Высшая школа, 1975. – 526 с.
- 3 Огарков, В. Б. Обобщенная плоская деформация равномерно-вращающегося изотропного упругого вала из несжимаемого материала [Текст] / В. Б. Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2018. – Т. 1. – № 1 (23). – С. 68-74.
- 4 Аксенов, А. А. Полный расчет на прочность упругой балки при изгибе [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2018. – Т. 1. – № 1 (23). – С. 75-80.
- 5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
- 6 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.

9 Аксенов, А. А. Расчет на прочность упругой балки при изгибе с цилиндрическим и коническим профилем [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков, К. Б. Просветов, И. Д. Гаврилов // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 2. – № 2 (16). – С. 101-104.

10 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. – pp. 15-23.

11 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

12 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.

13 Корн, Г. Справочник по математике [Текст] : учеб. / Г. Корн, Т. Корн. – М. : «Наука», 1970. – 720 с

14 Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами [Текст] : учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с.

15 Тимошенко, С. П. Теория упругостей [Текст] : учеб. / С. П. Тимошенко, Д. Ж. Гудьер. – М. : Наука, 1975 – 576 с.

16 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. [Текст] : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

17 Аксенов, А. А. Способ расчета на прочность упругой балки из древесного материала [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 3. – № 3 (17). – С. 53-56.

18 Benabou, L. Predictions of compressive strength and kink band orientation for wood species [Text] : L. Benabou // Mechanics of materials. – 2008. – Т. 42. –

Вып. 3. – С. 335-343. – DOI : 10.1016/j.mechmat.2009.11.015

19 Burgert, I. The tensile strength of isolated wood rays of beech (*Fagus sylvatica* L.) and its significance for the biomechanics of living trees [Text] : I. Burgert, D. Eckstein // *Trees-structure and function*. – 2001. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 168-170. – DOI : 10.1007/s004680000086.

20 Cowin, Sc. Strength anisotropy of bone and wood [Text] : Sc.Cowin // *Journal of applied mechanics-transactions of the asme*. – 1979. – Т. 46. – Вып. 4. – С. 832-838. – DOI : 10.1115/1.3424663.

21 De Magistris, F Deformation of wet wood under combined shear and compression [Text] : F. De Magistris, L. Salmen // *Wood science and technology*. – 2005. – Т. 39. – Вып. 6. – С. 460-471. – DOI : 10.1007/s00226-005-0025-x.

22 Aydemir, D. The Lap Joint Shear Strength of Wood Materials Bonded by Cellulose Fiber-Reinforced Polyvinyl Acetate [Text] : D.Aydemir // *Bioresources*. – 2014. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 1179-1188.

23 Galicki, J. A new approach to formulate the general strength theories for anisotropic discontinuous materials. Part A: The experimental base for a new approach to formulate the general strength theories for anisotropic materials on the basis of wood [Text] : J. Galicki, M. Czech // *Applied mathematical modeling*. – 2013. – Т. 37. – Вып. 3. – С. 815-827. – DOI : 10.1016/j.apm.2012.03.004.

24 Chida, Tomohiro A Proposed Standard Test Method for Shear Failure and Estimation of Shear Strength of Japanese Cedar I. Shear failure test of Japanese cedar laminates using wood material as stiffener and finite element analysis, and estimation of shear modulus [Text] : T.Chida, T.Sasaki, H.Yamauchi, Y.Okazaki, Y.Kawai, Y.Iijima, // *Mokuzai gakkaishi*. – 2012. – Т. 58. – Вып. 5. – С. 260-270. – DOI : 10.2488/jwrs.58.260.

25 Riyanto, Ds A comparison of test methods for evaluating shear strength of structural lumber [Text] : Ds. Riyanto, R. Gupta // *Forest products journal*. – 1998. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 83-90.

26 Longworth, J. Longitudinal shear-strength of timber beams [Text] : J. Longworth // *Forest products journal*. – 1977. – Т. 27. – Вып. 8. – С. 19-23.

27 Dumail, Jf. Smear and compression behavior of wood in relation to mechanical pulping [Text] : Jf. Dumail, L. Salmen // *Tappi international mechanical pulping conference*. – 1999. – С. 213-219.

28 Bendtsen, Ba. Rolling shear characteristics of 9 structural softwoods [Text] : Ba.Bendtsen // *Forest products journal*. – 1976. – Т. 26. – Вып. 11. – С. 51-56.