УДК 517.977.5

НАХОЖДЕНИЕ ПОЗИЦИОННОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ

Смирнова Е.В.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
E-mail: smirnel@yandex.ru

Аннотация: В статье исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой выдвигается требование сближения двух непрерывных процессов в фиксированных промежуточных точках. Приводится способ нахождения позиционного оптимального управления, позволяющий избегать решения краевых задач.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, позиционное управление, уравнение Риккати.

FINDING POSITIONAL OPTIMAL CONTROL IN THE CONVERGENCE PROBLEM

Smirnova E.V.
Federal State Budgetary Education Institution of Higher Education «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»
E-mail: smirnel@yandex.ru

Summary: The article examines the linear-quadratic optimal control problem, in which the requirement of convergence of two continuous processes at fixed intermediate points is put forward. A method for finding positional optimal control that avoids solving boundary value problems is given.

Keywords: linear-quadratic optimal control problem, positional control, Riccati equation.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, состоящую из двух непрерывных процессов, заданных линейными дифференциальными уравнениями на конечном временном промежутке $[0,T]$. Для первого – прямого процесса, задано начальное условие при $t=0$, для второго – обратного, задано конечное при

$t=T$. Внутри отрезка $[0,T]$ зафиксированы промежуточные точки t_j : $0=t_0<t_1<\ldots<t_j<\ldots<t_{N+1}=T$. Критерий качества кроме интегрального компонента содержит квадратичные формы отклонений значений состояний прямого и обратного процессов друг от друга в промежуточных точках. Интегральная составляющая функционала может трактоваться как минимизация энергетических затрат, дискретная как сближение траекторий процессов в моменты t_j.

Итак, минимизируем функционал

$$J(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N+1}\left\langle x_1(t_j)-x_2(t_j),F_j(x_1(t_j)-x_2(t_j))\right\rangle+ \\ +\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{k=1}^{2}\left(\left\langle x_k(t),W_k(t)x_k(t)\right\rangle+\left\langle u_k(t),R_k(t)u_k(t)\right\rangle\right)dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\frac{d}{dt}x_k(t)=A_k(t)x_k(t)+B_k(t)u_k(t),\ \ k=1,2,\ \ 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$x_1(0)=x^0,\ \ x_2(T)=x^T. \tag{3}$$

Предположим, что операторы $F_j, j=0,\ldots,N+1, R_k, k=1,2$ − симметрические, положительно определенные и $W_k, k=1,2$ − симметрические, неотрицательно определенные. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ − обозначение скалярного произведения.

В работе [1] рассматривалась задача, где в фиксированные моменты времени требовалось сближение объектов с заданными точками. В [2] минимизируемый функционал зависел от отклонений в промежуточной точке значений траекторий двух последовательно функционирующих систем.

Оптимальное управление в форме обратной связи для линейно-квадратичных задач с промежуточными точками в критерии качества, для гибридных систем были получены в [3, 4].

В [5] приведен способ нахождения программного управления для задачи (1)-(3). Согласно принципу максимума, оптимальные управления $u_{k*}(t)$ находятся по формулам

$$u_{k*}(t)=R_k(t)^{-1}B_k(t)'\psi_k(t), \tag{4}$$

где множители Лагранжа $\psi_k(t)$ - решение задачи

$$\frac{d}{dt}\psi_k(t)=W_k(t)x_k(t)-A_k(t)'\psi_k(t),\quad t\ne t_j, \tag{5}$$

$$\psi_k(t_j-0)-\psi_k(t_j+0)=(-1)^k F_j(x_{1*}(t_j)-x_{2*}(t_j)),\ \ j=1,\ldots,N, \tag{6}$$

$$\psi_1(T)=-F_{N+1}(x_{1*}(T)-x^T),\ \ \psi_2(0)=-F_0(x^0-x_{2*}(0)), \tag{7}$$

$x_{k*}(t)$ - траектории систем (2), (3), соответствующие управлениям $u_{k*}(t)$.

При использовании этого метода, приходится решать краевую задачу для нахождения $(x_{1*}(t),x_{2*}(t),\psi_1(t),\psi_1(t))$. Данное обстоятельство затрудняет программную реализацию численных расчетов.

В [6] для задачи из [2, гл. 3] предложен алгоритм представления оптимального управления с использованием переменной состояния, позволяющий избегать решения краевых задач. Используем, описанную в [6] декомпозицию задачи, и докажем возможность применения этого подхода для задачи (1)-(3).

Теорема

Пусть $P_k(t)$ – матрицы Риккати являются решениями независимых задач Коши

$$\frac{d}{dt}P_k(t)=-P_k(t)A_k(t)-A_k(t)'P_k(t)+P_k(t)B_k(t)R_k(t)^{-1}B_k(t)'P_k(t)-W_k(t), \tag{9}$$

$$P_1(T)=F_{N+1},\ \ P_2(0)=-F_0,\ \ P_k(t_j-0)=P_k(t_j+0),\ k=1,2,\ \ j=1,\ldots,N. \tag{10}$$

Переменные состояний представим в виде

$$x_{k*}(t)=z_k(t)-V_k(t)\varphi_k(t), \tag{11}$$

где матрицы $V_k(t)$ - решения операторных уравнений

$$\frac{d}{dt}V_k=(A_k-B_kR_k^{-1}B_k{}'P_k)V_k+V_k(A_k-B_kR_k^{-1}B_k{}'P_k)'+B_kR_k^{-1}B_k{}',\ \ t\neq t_j, \tag{12}$$

$$V_1(t_{j-1}+0)=0,\ \ V_2(t_j-0)=0,\ \ j=1,\ldots,N+1, \tag{13}$$

функции $z_k(t),\varphi_k(t)$ являются решениями сопряженных уравнений

$$\frac{d}{dt}z_k(t)=(A_k(t)-B_k(t)R_k^{-1}(t)B_k(t)'P_k(t))z_k(t),\ \ t\neq t_j, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_k(t)=(A_k(t)-B_k(t)R_k^{-1}(t)B_k(t)'P_k(t))'\varphi_k(t),\ \ t\neq t_j, \tag{15}$$

$$z_1(0)=x^0,\quad z_2(T)=x^T, \tag{16}$$

$$z_k(t_j-0)-z_k(t_j+0)=(-1)^{k+1}V_k(t_j+(-1)^k\cdot 0)\varphi_k(t_j+(-1)^k\cdot 0), \tag{17}$$

$$\varphi_1(T)=-F_{N+1}x^T,\quad \varphi_2(0)=F_0x^0, \tag{18}$$

$$\varphi_k(t_j-0)-\varphi_k(t_j+0)=(-1)^{k+1}F_j(z_1(t_j+0)-z_2(t_j-0)), \tag{19}$$

$$j=1,\ldots,N,\ \ k=1,2.$$

Тогда функции

$$\psi_k(t) = -P_k(t)x_{k*}(t) - \varphi_k(t),\ k = 1,2, \tag{20}$$

есть сопряженные переменные из (5)-(7) и оптимальные управления можно представить с использованием переменных состояний

$$u_k(t) = -R_k(t)^{-1}B_k(t)'(P_k(t)x_{k*}(t) + \varphi_k(t)). \tag{21}$$

Доказательство.

Обозначим $M_k(t) = A_k(t) - B_k(t)R_k^{-1}(t)B_k(t)'P_k(t)$.

Продифференцируем (11): $\dot{x}_{k*}(t) = \dot{z}_k(t) - \dot{V}_k(t)\varphi_k(t) - V_k(t)\dot{\varphi}_k(t)$.

Подставим $\dot{z}_k, \dot{V}_k, \dot{\varphi}_k$ из(14), (12), (15) соответственно:

$$\dot{x}_{k*} = M_k z_k - (M_k V_k + V_k M_k' + B_k R_k^{-1} B_k')\varphi_k + V_k M_k' \varphi_k = M_k(z_k - V_k\varphi_k) + B_k R_k^{-1} B_k' \varphi_k.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}x_{k*}(t) = (A_k(t) - B_k(t)R_k^{-1}(t)B_k(t)'P_k(t))x_{k*}(t) - B_k(t)R_k^{-1}(t)B_k(t)'\varphi_k(t). \tag{22}$$

Продифференцируем (20): $\dot{\psi}_k(t) = -\dot{P}_k(t)x_{k*}(t) - P_k(t)\dot{x}_{k*}(t) - \dot{\varphi}_k(t)$.

Подставляя $\dot{P}_k,\ \dot{x}_{k*},\ \dot{\varphi}_k$ из (9), (22), (15) и учитывая, что $P_k(t) = (P_k(t))'$, получим

$$\dot{\psi}_k = P_k A_k x_{k*} + A_k' P_k x_{k*} - P_k B_k R_k^{-1} B_k' P_k x_{k*} + W_k x_{k*} - P_k A_k x_{k*} - P_k B_k R_k^{-1} B_k'(-P_k x_{k*} - \varphi_k) +$$
$$+ A_k'\varphi_k - P_k' B_k R_k^{-1} B_k' \varphi_k = -A_k'(-P_k x_{k*} - \varphi_k) + W_k x_{k*}.$$

Таким образом, $\psi_k(t),\ k = 1,2$, найденные по формулам (20), удовлетворяют уравнениям (5). Подставляя (20) в (4), получаем (21).

Докажем выполнение краевых условий. Преобразуем приращения сопряженных переменных в точках t_j, используя (20), (10), (18), (11), (13)

$$\psi_k(t_j - 0) - \psi_k(t_j + 0) = -P_k(t_j - 0)x_{k*}(t_j) - \varphi_k(t_j - 0) + P_k(t_j + 0)x_{k*}(t_j) + \varphi_k(t_j + 0) =$$
$$= (-1)^k F_j(z_1(t_j + 0) - z_2(t_j - 0)) = (-1)^k F_j(x_{1*}(t_j) + V_1(t_j + 0)\varphi_1(t_j + 0) - x_{2*}(t_j) -$$
$$- V_1(t_j - 0)\varphi_1(t_j - 0)) = (-1)^k F_j(x_{1*}(t_j) - x_{2*}(t_j)),\ j = 1,\ldots,N,$$

т.е. получили условие (6).

Аналогично проверяется подстановкой условия (7).

Требования (17) получаются из условий непрерывности траекторий x_{k*} в t_j, преобразованных с учетом (11), (13).

Разрешимость задачи

Как известно из [7], задачи (9), (10) имеют единственное симметрическое решение $P_k(t)$. Согласно [6], решения $V_k(t) = V_k^j(t)(t \in [t_{j-1}, t_j])$ операторных уравнений (12), с начальными условиями (13) можно найти по формулам

$$V_1^j(t) = \int_{t_{j-1}}^{t} U_{M_1}(t,\tau) B_1(\tau) R_1^{-1}(\tau) B_1(\tau)' (U_{M_1}(t,\tau))' d\tau, \tag{23}$$

$$V_2^j(t) = \int_{t_j}^{t} U_{M_2}(t,\tau) B_2(\tau) R_2^{-1}(\tau) B_2(\tau)' (U_{M_2}(t,\tau))' d\tau, \tag{24}$$

где $U_{M_k}(t,\tau)$ – фундаментальная матрица перехода для уравнения $\dot{Z} = M_k Z$. При записи формул (23), (24) использовалось свойство фундаментальных матриц [9]: $U_{-M'}(\tau,t) = (U_M(t,\tau))'$. Как показано в [6], $V_1^j(t)$ – неотрицательно определенный оператор, $V_2^j(t)$ – неположительно определен при условии положительной определенности $R_k, k = 1,2$.

Рассмотрим нулевые начальные условия:

$$x_0 = 0, \ \ x^T = 0. \tag{25}$$

Используя (22), (15) преобразуем производную скалярного произведения вектора состояния на вектор – функцию $\varphi_k(t)$ при $t \in [t_{j-1}, t_j], \ \ j = 1,\ldots, N+1$:

$$\frac{d\langle x_k(t), \varphi_k(t)\rangle}{dt} = -\Big\langle B_k(t) R_k^{-1}(t) B_k(t)' \varphi_k(t), \varphi_k(t)\Big\rangle. \tag{26}$$

Условия (19), с учетом (11), (13) можно записать в виде:

$$\varphi_k(t_j - 0) - \varphi_k(t_j + 0) = (-1)^{k+1} F_j(x_1(t_j) - x_2(t_j)). \tag{27}$$

Принимая во внимание равенства (25), (27), сумму при $k = 1,2, \ \ j = 1,\ldots, N+1$ интегралов по промежуткам $[t_{j-1}, t_j]$ соотношений (26), получим

$$\sum_{j=1}^{N} \Big\langle x_1(t_j) - x_2(t_j), F_j(x_1(t_j) - x_2(t_j))\Big\rangle + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{N+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\langle B_k(t) R_k^{-1}(t) B_k(t)' \varphi_k(t), \varphi_k(t)\Big\rangle dt = 0.$$

Из последнего соотношения, в силу положительной определенности операторов $F_j, j = 0,\ldots, N+1, R_k, k = 1,2$ следует, что

$$F_j(x_1(t_j) - x_2(t_j)) = 0, \ \ B_k(t) R_k^{-1}(t) B_k(t)' \varphi_k(t) = 0.$$

При равенстве нулю начальных данных – (25), из (27), (15), (18) получаем, что $\varphi_k(t) \equiv 0$, из (14), (16), (17) – $z_k(t) \equiv 0, \ \ k = 1,2$. Таким образом, система (14)-(19) имеет единственное решение.

Минимальное значение критерия качества (1) может быть найдено по формуле

$$J_{\min} = J(u_{1*}, u_{2*}) = \frac{1}{2}\left(\left\langle x^T, \psi_1(T) + \psi_2(T)\right\rangle - \left\langle x^0, \psi_1(0) + \psi_2(0)\right\rangle\right). \quad (28)$$

Выражая $W_k(t)x_{k*}(t)$ и $R_k(t)u_{k*}(t)$ из (5), (4), используя формулу интегрирования по частям, преобразуем интегральную составляющую в (1).

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{2}\left(\langle x_{k*}, W_k x_{k*}\rangle + \langle u_{k*}, R_k u_{k*}\rangle\right)dt = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{N+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle x_{k*}, \dot{\psi}_k + A_k{}'\psi_k\right\rangle + \left\langle u_{k*}, B_k{}'\psi_k\right\rangle\right)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{N+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\langle x_{k*}, \dot{\psi}_k\rangle + \langle \psi_k, A_k x_k + B_k u_k\rangle\right)dt = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{N+1}\langle x_{k*}, \psi_k\rangle\Big|_{t_{j-1}}^{t_j}$$

Применяя (3), (6), (7), из (1) получим формулу (28).

Используя эволюционные операторы $U_{M_k}(t,\tau)$, выпишем следующие соотношения: $z_1(t_j - 0) = U_{M_1}(t_j, t_{j-1})z_1(t_{j-1} + 0)$, $z_2(t_{j-1} + 0) = U_{M_2}(t_{j-1}, t_j)z_2(t_j - 0)$, $\varphi_1(t_{j-1} + 0) = (U_{M_1}(t_j, t_{j-1}))'\varphi_1(t_j - 0)$, $\varphi_2(t_j - 0) = (U_{M_2}(t_{j-1}, t_j))'\varphi_2(t_{j-1} + 0)$.

Замечание 1

Согласно свойству переходной матрицы [8]:

$$U_{M_k}(t,s)U_{M_k}(s,\tau) = U_{M_k}(t,\tau),$$

но формула $z_1(t_j) = U_{M_1}(t_j, t_{j-i})z_1(t_{j-i})$ верна только при $i = 1$, потому что функции z_1 (аналогично для z_2, φ_1, φ_2) имеют разрывы в точках t_j, см. (17).

Смешанные краевые условия (17), (19) преобразуем к системе из $4N$ – уравнений с $4N$ – неизвестными: $z_1(t_j + 0),\ z_2(t_j - 0),\ \varphi_1(t_j - 0),\ \varphi_2(t_j + 0),\ \ j = 1,\ldots,N$. Эту систему разобьем на две подсистемы. Первая соответствует условиям (17):

$$\begin{cases} z_1(t_1 + 0) + V_1(t_1 - 0)\varphi_1(t_1 - 0) = U_{M_1}(t_1, 0)x^0, \\ z_1(t_j + 0) - U_{M_1}(t_j, t_{j-1})z_1(t_{j-1} + 0) + V_1(t_j - 0)\varphi_1(t_j - 0) = 0, \\ z_2(t_{j-1} - 0) - U_{M_2}(t_{j-1}, t_j)z_2(t_j - 0) + V_2(t_{j-1} + 0)\varphi_2(t_{j-1} + 0) = 0, \ \ j = 2,\ldots,N, \\ z_2(t_N - 0) + V_2(t_N + 0)\varphi_2(t_N + 0) = U_{M_2}(t_N, T)x^T. \end{cases}$$

Вторая подсистема соответствует (19):

$$\begin{cases} -\varphi_2(t_1 + 0) + F_1 z_1(t_1 + 0) - F_1 z_2(t_1 - 0) = -(U_{M_2}(0, t_1))'F_0 x^0, \\ \varphi_1(t_j - 0) - (U_{M_1}(t_{j+1}, t_j))'\varphi_1(t_{j+1} - 0) - F_j z_1(t_j + 0) + F_j z_2(t_j - 0) = 0, \ j = 1,\ldots,N-1, \\ (U_{M_2}(t_j, t_{j+1}))'\varphi_2(t_j + 0) - \varphi_2(t_{j+1} + 0) + F_{j+1}z_1(t_{j+1} + 0) - F_{j+1}z_2(t_{j+1} - 0) = 0, \\ \varphi_1(t_N - 0) - F_N z_1(t_N + 0) + F_N z_2(t_N - 0) = -(U_{M_1}(T, t_N))'F_{N+1}x^T. \end{cases}$$

Введем обозначения: $V_k^j = V_k(t_j + (-1)^k \cdot 0),\ U_k^{i,j} = U_{M_k}(t_i, t_j)$,

$$\tilde{z}_k=\begin{pmatrix} z_k(t_1+(-1)^{k-1}\cdot 0)\\ \cdots \\ .z_k(t_N+(-1)^{k-1}\cdot 0)\end{pmatrix},\ \tilde{\varphi}_k=\begin{pmatrix} \varphi_k(t_1+(-1)^{k}\cdot 0)\\ \cdots \\ \varphi_k(t_N+(-1)^{k}\cdot 0)\end{pmatrix},\ k=1,2.$$

В первой подсистеме можно выразить $\tilde{z}_k$ через $\tilde{\varphi}_k$:

$$\tilde{z}_1=-\begin{pmatrix} V_1^1 & 0 & ... & 0\\ U_1^{2,1} & V_1^1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ U_1^{N,1}V_1^1 & U_1^{N,2}V_1^2 & ... & V_1^N\end{pmatrix}\tilde{\varphi}_1+\begin{pmatrix} U_1^{1,0}\\ U_1^{2,0}\\ ...\\ U_1^{N,0}\end{pmatrix}x^0, \qquad (29)$$

$$\tilde{z}_2=-\begin{pmatrix} V_2^1 & U_2^{1,2}V_2^2 & \cdots & U_2^{1,N-1}V_2^{N-1} & U_2^{1,N}V_2^N\\ 0 & V_2^2 & \cdots & U_2^{2,N-1}V_2^{N-1} & U_2^{2,N}V_2^N\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & V_2^{N-1} & U_2^{N-1,N}V_2^{N-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & V_2^N\end{pmatrix}\tilde{\varphi}_2+\begin{pmatrix} U_2^{1,N+1}\\ U_2^{2,N+1}\\ \cdots\\ U_2^{N,N+1}\end{pmatrix}x^T. \qquad (30)$$

Во второй подсистеме, используя (29), (30), исключим $\tilde{z}_k$. Запишем вторую подсистему в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{b}_1\\ \tilde{b}_2\end{pmatrix}, \qquad (31)$$

где $A_1=\begin{pmatrix} I & -(U_1^{2,1})' & \cdots & 0 & 0\\ 0 & I & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & I & -(U_1^{N,N-1})\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} -I & 0 & \cdots & 0 & 0\\ (U_2^{1,2})' & -I & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -I & 0\\ 0 & 0 & \cdots & (U_2^{N,N+1})' & -I\end{pmatrix}$,

$$A_3=\begin{pmatrix} V_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ U_1^{2,1}V_1^1 & F_2^{-1}+V_1^2 & -F_2^{-1}(U_1^{32})' & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_1^{N-1,1}V_1^1 & U_1^{N-1,2}V_1^2 & U_1^{N-1,3}V_1^3 & \cdots & F_{N-1}^{-1}+V_1^{N-1} & -F_{N-1}^{-1}(U_1^{N,N-1})'\\ U_1^{N,1}V_1^1 & U_1^{N,2}V_1^2 & U_1^{N,3}V_1^3 & \cdots & U_1^{N,N-1}V_1^{N-1} & F_N^{-1}+V_1^N \end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix} (F_1)^{-1}-V_2^1 & -U_2^{1,2}V_2^2 & \cdots & -U_2^{1,N}V_2^N\\ 0 & -V_2^2 & \cdots & -U_2^{2,N}V_2^N\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -V_2^N \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_1=\begin{cases} при\ \ N=1,\ -(U_2^{0,1})'F_0x^0-(U_1^{2,1})'F_2x^T, \\ при\ \ N=k\neq 1,\ ((-(U_2^{0,1})'F_0x^0)',\ \underbrace{0,\ldots,0,}_{(k-2)-раз}\ (-(U_1^{N+1,N})'F_{N+1}x^T)')', \end{cases}$$

$$\tilde{b}_2=\begin{pmatrix} F_1^{-1}(U_2^{0,1})'F_0x^0+U_1^{1,0}x^0-U_2^{1,N+1}x^T\\ \cdots\\ U_1^{k,0}x^0-U_2^{k,N+1}x^T\\ \cdots\\ -F_N^{-1}(U_1^{N+1,N})'F_{N+1}x^T+U_1^{N,0}x^0-U_2^{N,N+1}x^T \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда $N=1$, т.е. одна промежуточная точка. Тогда система (31) имеет вид

$$\begin{pmatrix} I & -I\\ V_1^1 & F_1^{-1}-V_2^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(t_1-0)\\ \varphi_2(t_1+0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(U_2^{0,1})'F_0x^0-(U_1^{2,1})'F_2x^T\\ F_1^{-1}(U_2^{0,1})'F_0x^0+(U_1^{1,0}x^0-U_2^{1,2}x^T) \end{pmatrix} \tag{32}$$

Замечание 2

В [11] приводятся методы нахождения переходной матрицы $U_k^{i,j}$, но для решения системы (31) можно найти результат действия эволюционного оператора на матрицу. $U_k^{i,j}Y$ – есть значение в точке t_i решения задачи Коши:

$$\frac{dX}{dt}=M_kX,\ \ X(t_j)=Y.$$

Блочный оператор $\begin{pmatrix} I & -I\\ V_1^1 & F_1^{-1}-V_2^1 \end{pmatrix}$ обратим, т.к. $F_1^{-1}+V_1^1-V_2^1>0$ (см. [8]), в силу того, что $V_1^1\geq 0$, $V_2^1\leq 0$, $F_1^{-1}>0$.

Т.е. из (32) найдем $\varphi_1(t_1-0)$, $\varphi_2(t_1+0)$, из (29), (30) - $z_1(t_1+0)$, $z_2(t_1-0)$. Тогда вместо краевой задачи (14)-(19) необходимо решить несколько начальных задач.

При $N=2$, систему (31) преобразуем к виду:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & -I & -(U_1^{2,1})' \\ 0 & I & -(U_2^{1,2})' & -I \\ \hline V_1^1 & -U_2^{1,2}V_2^2 & F_1^{-1}-V_2^1 & 0 \\ U_1^{2,1}V_1^1 & -V_2^2 & 0 & F_2^{-1}+V_1^2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_2^2 \\ \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(U_2^{0,1})'F_0x^0 \\ -(U_1^{3,2})'F_3x^T \\ F_1^{-1}(U_2^{0,1})'F_0x^0+(U_1^{1,0}x^0-U_2^{1,3}x^T) \\ -F_2^{-1}(U_1^{3,2})'F_3x^T+(U_1^{2,0}x^0-U_2^{2,3}x^T) \end{pmatrix},$$

где $\varphi_k^j=\varphi_k(t_j+(-1)^k\cdot 0)$.

Оператор $K=\begin{pmatrix} F_1^{-1}-V_2^1 & 0 \\ 0 & F_2^{-1}+V_1^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I & U_2^{1,2} \\ U_1^{2,1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^1 & 0 \\ 0 & -V_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & U_2^{1,2} \\ U_1^{2,1} & I \end{pmatrix}'$ – обратим, так как $F_1^{-1},F_2^{-1}>0$, $V_1^1\ge 0$, $V_2^1\le 0$. Тогда, используя теорему Фробениуса ([8]), получим

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(t_1+0) \\ \varphi_1(t_2-0) \end{pmatrix}=K^{-1}\left(\tilde{b}_2-\begin{pmatrix} V_1^1 & -U_2^{1,2}V_2^2 \\ U_1^{2,1} & -V_2^2 \end{pmatrix}\tilde{b}_1\right),$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_1-0) \\ \varphi_2(t_2+0) \end{pmatrix}=\tilde{b}_1+\begin{pmatrix} I & (U_1^{2,1})' \\ (U_2^{1,2})' & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_2(t_1+0) \\ \varphi_1(t_2-0) \end{pmatrix}.$$

Из (29), (30) находим $z_1(t_1+0)$, $z_2(t_1-0)$, $z_1(t_2+0)$, $z_2(t_2-0)$. Таким образом, краевая задача (14)-(19) в случаи двух промежуточных точек, также может быть приведена к решению нескольких задач Коши.

В представленной работе получена формула для нахождения позиционного оптимального управления для задачи сближения (1)-(3). Доказана разрешимость вспомогательных задач. Найдено минимальное значение критерия качества. При числе промежуточных точек $N=1$ и $N=2$ приведен алгоритм получения оптимального управления в форме обратной связи, сводящийся к решению нескольких начальных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Смирнова, Е. В. Асимптотический анализ математических моделей оптимального управления с промежуточными точками и малым параметром в критерии качества : специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук : защищена 10.12.2009 / Е. В. Смирнова ; Смирнова Елена Владимировна ; Воронежский государственный университет. – Воронеж, 2009. – 122 с.

2 Курина, Г. А. Асимптотическое решение некоторых задач оптимального управления с промежуточными точками в критерии качества и малым параметром / Г. А. Курина, Е. В. Смирнова // Современная математика. Фундаментальные направления. – Москва: РУДН, 2009. – Т. 34. – С. 63-99.

3 Курина, Г. А. Оптимальное управление в форме обратной связи для линейно-квадратичной задачи с промежуточными точками / Г. А. Курина, Е. В. Смирнова, И. Чоу // Труды математического факультета : сборник научных трудов. – Выпуск 11 (новая серия) ; ВГУ. – Воронеж : Научная книга, 2007. – С. 121-127.

4 Ажмяков, В. В. О методе динамического программирования для линейно квадратичных задач оптимального управления в гибридных системах / В. В. Ажмяков, Р. Галван-Гуерра, А. Е. Поляков // Автоматика и телемеханика. – 2009. – Выпуск 5. – С. 51-64.

5 Смирнова, Е. В. Необходимое и достаточное условие оптимальности управления в задаче о сближении / Е. В. Смирнова, Х. М. Рамазанов, И. В. Кунов // Современные проблемы естествознания. Инженерный анализ объектов обеспечения авиации: в 2 т. Т. 1. Актуальные проблемы математики и информатики : сб. ст. по материалам V научно-практической конференции «Молодёжные чтения, посвященные памяти Ю.А. Гагарина» 16 мая 2018 г. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2018. – С. 133-138.

6 Курина, Г. А. Декомпозиция линейно – квадратичных задач оптимального управления для двухступенчатых систем / Г. А. Курина, И. Чоу // Доклады академии наук. Теория управления. – 2011. – Т. 437. – № 1. – С. 28-30.

7 Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – Москва : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 576 с.

8 Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 536 с.

9 Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва : Издательство «Мир», 1970. – 720 с.

10 Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 5-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 с.

11 Андреев, Ю. Н. Управление конечномерными объектами / Ю. Н. Андреев – Москва : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 424 с.