УДК 674.81

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

В.Б. Огарков, Р.В. Юдин

Древесина, как совокупность органических веществ, слагающих клеточные оболочки, представляет собой комплекс природных полимеров. Под действием усилий, приложенных к полимерному материалу, могут возникать упругие деформации вследствие обратимого изменения средних междучастичных расстояний, высокоэластические деформации, связанные с обратимой перегруппировкой частиц (звеньев цепных молекул) и вязкотекучие деформации, обусловленные необратимым смещением молекулярных цепей.

Изучим классификацию аналитических решений обобщенного уравнения Эйлера с вещественными коэффициентами d_1 и d_2 [1]:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d_1 du}{r dr} + \frac{d_2}{r^2} u = 0 . \tag{1}$$

Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^2 + (d_1 - 1)\cdot \lambda + d_2 = 0 , \tag{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{1-d_1}{2}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{(1-d_1)^2}{4} - d_2\right]} . \tag{3}$$

$$u(r) = c_1 \cdot r^{\lambda_1} + c_2 \cdot r^{\lambda_2} \tag{4}$$

Введем в рассмотрение комплексную функцию[2]:

$$\lambda(r) = r\frac{du}{dr} + \left(c + i\cdot\sqrt{d}\right)\cdot u \tag{5}$$

$$c = \frac{d_1 - 1}{2} \qquad d = d_2 - \frac{(d_1 - 1)^2}{4} \tag{6}$$

Для нахождения функции $\lambda(r)$ следует рассмотреть уравнение:

$$r\frac{d\lambda}{dr} + \left(c - i\sqrt{d}\right)\lambda = 0 \tag{7}$$

Подставим в функцию (6) уравнение (7):

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+r(2c+1)\frac{du}{dr}+(c^2+d)u=0 \tag{8}$$

Из уравнения (1) и (8) получим:

$$2c+1=a_1,\ c^2+d=a_2 \tag{9}$$

В зависимости от значения коэффициента d для уравнения (1) необходимо рассмотреть три случая.

а) Пусть

$$d\prec 0\ \ a_2-\frac{(a_1-1)^2}{4}\prec 0\quad a_2\prec\frac{(a_1-1)^2}{4}. \tag{10}$$

Уравнения (6) и (7) примут такой вид:

$$r\frac{d\lambda}{dr}+\left[\frac{(a_1-1)}{2}-\sqrt{\left(\frac{(a_1-1)^2}{4}-a_2\right)}\right]\cdot\lambda=0, \tag{11}$$

$$r\frac{du}{dr}+\left[\frac{(a_1-1)}{2}-\sqrt{\left(\frac{(a_1-1)^2}{4}-a_2\right)}\right]\cdot u=\lambda, \tag{12}$$

$$\lambda(r)=c_1r^{\lambda_2} \tag{13}$$

$$u(r)=c_2r^{\lambda_1}+\frac{c_1}{(\lambda_2-\lambda_1)}r^{\lambda_2}, \tag{14}$$

б) $d=0\ ;\lambda_1=\lambda_2;\ a_2=\dfrac{(1-a_1)^2}{4}\quad \lambda_1=\dfrac{(1-a_1)}{2}$ (15)

$$r\frac{d\lambda}{dr}+\frac{(a_1-1)}{2}\lambda=0 \tag{16}$$

$$r\frac{du}{dr}+\frac{(a_1-1)}{2}u=\lambda \tag{17}$$

$$u(r)=D_1r^{\lambda_1}+D_2r^{\lambda_1}\ln r \tag{18}$$

в) Пусть $d\succ 0\ ;\ a_2-\dfrac{(a_1-1)^2}{4}\succ 0\qquad a_2\succ\dfrac{(a_1-1)^2}{4}$ (19)

$$r\frac{d\lambda}{dr}+\left[\frac{(a_1-1)}{2}-i\sqrt{\left(a_2-\frac{(a_1-1)^2}{4}\right)}\right]\cdot\lambda=0 \tag{20}$$

$$r\frac{du}{dr}+\left[\frac{(a_1-1)}{2}-i\sqrt{\left(a_2-\frac{(a_1-1)^2}{4}\right)}\right]\cdot u=\lambda \tag{21}$$

$$u(r)=r^{-c}\left[A_1\cos\left(\sqrt{d}\varphi ur\right)+A_2\sin\left(\sqrt{d}\varphi ur\right)\right] \tag{22}$$

Константы A_1 и A_2 подлежат определению из отдельных условий.

В качестве примера рассмотрим задачу полярно-симметричного плоского деформирования упругого цилиндра под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений p и q. [3].

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_Q=0 \quad \sigma_r(r=r_1)=-p \quad \sigma_r(r=r_2)=-q \tag{23}$$

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr} \quad \varepsilon_Q=\frac{u}{r} \tag{24}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_Q}{dr}\right)-r\frac{d\varepsilon_r}{dr}=0 \tag{25}$$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}\left[\sigma_r-\mu\left(\sigma_Q+\sigma_z\right)\right] \tag{26}$$

$$\varepsilon_Q=\frac{1}{E}\left[\sigma_Q-\mu\left(\sigma_r+\sigma_z\right)\right] \tag{27}$$

$$\varepsilon_z=0=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_r+\sigma_Q\right)\right] \tag{28}$$

$$\sigma_z=\mu\left(\sigma_r+\sigma_Q\right) \tag{29}$$

Закон Гука (26) и (27) примет вид:

$$\varepsilon_r=\frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\sigma_r-\mu\sigma_Q\right] \tag{30}$$

$$\varepsilon_Q=\frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\sigma_Q-\mu\sigma_r\right] \tag{31}$$

Развернем закон Гука (30) и (31) относительно напряжений:

$$\sigma_{\text{r}}=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_r+\mu\varepsilon_Q\right] \tag{32}$$

$$\sigma_Q=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_Q+\mu\varepsilon_r\right] \tag{33}$$

Подставим напряжения (32) и (33) выражения равновесия (1):

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0, \tag{34}$$

$$a_1=1 \quad a_2=-1 \quad c=0 \quad d=-1\prec 0. \tag{35}$$

Уравнение (5) и (7) примут такой вид:

$$r\frac{d\lambda}{dr}+\lambda=0 \tag{36}$$

$$r\frac{du}{dr}-u=\lambda \tag{37}$$

$$\lambda(r)=\frac{c_1}{r}\quad u(r)=c_2r-\frac{c_1}{2r} \tag{38}$$

Используем закон Гука(32) и соотношения Коши (24):

$$(1-\mu)\frac{du}{dr}+\mu\frac{u}{r}=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\sigma_r \tag{39}$$

Подставим формулу (37) в соотношение (39):

$$\frac{du}{dr}=\frac{u}{r}+\frac{\lambda}{r}=\frac{u}{r}+\frac{C_1}{r^2} \tag{40}$$

$$(1-\mu)\left[\frac{u}{r}+\frac{C_1}{r^2}\right]+\mu\frac{u}{r}=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\sigma_r \tag{41}$$

$$\frac{u}{r}=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\sigma_r-(1-\mu)\frac{C_1}{r^2} \tag{42}$$

$$u(r)=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}r\sigma_r-(1-\mu)\frac{C_1}{r^2} \tag{43}$$

$$u(r=r_1)=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}r_1p-(1-\mu)\frac{C_1}{r_1} \tag{44}$$

$$u(r=r_2)=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}r_2q-(1-\mu)\frac{C_1}{r_2} \tag{45}$$

Изменение толщины цилиндра:

$$u(r_2)-u(r_1)=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(r_1p-r_2q)+(1+\mu)C_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{46}$$

Формула (46) имеет практическое значение, поскольку из нее следует, что изменение диаметра цилиндра зависит только от одной константы C_1.

Отметим, что формулы (36) и (37) имеют существенное научное значение, поэтому при решении неоднородного уравнения (1) по методу неопределенных коэффициентов необходимо решать при нахождении частного решения систему алгебраических уравнений, что усложняет задачу.

Формулы (16) и (17) дают общий интервал данных, выраженные через явные формы решений дифференциального уравнения первого порядка.

Приведем значения коэффициентов C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{2r_1^2 r_2^2 (1+\mu)(p-q)}{\left(r_1^2 - r_2^2\right)} \tag{47}$$

$$C_2 = -(1+\mu)(1-2\mu)p - \frac{(1-2\mu)C_1}{2r_1^2}. \tag{48}$$

Список литературы

1 . Матвеев, Н.М. Дифференцированные уравнения [Текст] / Н.М. Матвеев. –. ЛГУ, 1943 – 411 с.

2. Огарков, В.Б. Способ решения обыкновенного дифференцированного уравнения и его приложения в задачах механики и теории управления [Текст] / В.Б. Огарков // Материалы четвертой международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. – ВГУ, 2011 – С. 216-218.