УДК: 674.815:04; 674.028

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРЕССОВАННОЙ ДРЕВЕСИНЫ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ НАГРЕВЕ ЕЕ ИЗНУТРИ

А. А. Аксенов, С. В. Малюков, В. С. Тюхин
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

При проведении расчета, за основу принимается образец из прессованной древесины, который с тепловой точки зрения представляет неограниченную пластину. Это обстоятельство позволит вести тепловые расчеты только вдоль оси *x*, т. е. будет рассмотрена одномерная задача. При решении предполагаем, что внутри образца из прессованной древесины происходит ее интенсивный нагрев, который подчиняется какому-то заданному закону (функции).

Начало координат расположим в середине толщины образца из прессованной древесины, которую обозначим через $2R$, т. е. R – половина толщины образца. В результате в решении получим внутреннюю симметричную задачу. Принимаем, что в начальный момент времени ограничивающие поверхности имеют температуру среды t_2, которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса нагрева (сушки).

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом. Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2};\ (\tau > 0; -R < x < +R), \tag{1}$$

где τ – время, c; a – коэффициент температуропроводности, $м^2/c$.

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$t(x,0) = t_2;\ (\tau = 0), \tag{2}$$

$$t(0,\tau) = t_1 = t_2 + b\tau;\ (x = 0), \tag{3}$$

$$\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial x} = -h[t(R,\tau) - t_2],\ (x = R), \tag{4}$$

где t_2 – температура окружающей среды, ^0C; t_1 – температура внутри образца

из прессованной древесины, ^0C; b – скорость повышения температуры при нагреве прессованной древесины, ^0C; $h = \alpha/\lambda$ – коэффициент, зависящий от теплопроводящих свойств прессованной древесины и окружающей среды, а также от степени ее изоляции со средой (при полной изоляции, т. е. в замкнутом контуре $h = 0$); λ – коэффициент теплопроводности прессованной древесины, $Вт/м{\cdot}^0C$; α – коэффициент теплоотдачи, $Вт/м^2{\cdot}^0C$ [1-6].

Из зависимости (3) следует, что изменение температуры внутри образца происходит по линейному закону со скоростью нагрева «b», а теплообмен образца с окружающей средой происходит по закону конвенции и определяется зависимостью (4).

Для решения дифференциального уравнения теплопроводности (1) с начальными условиями (2) и граничными (3) и (4) сделаем некоторые допущения:

1 Так как у прессованной древесины анизотропия существенно снижается по сравнению с натуральной древесиной, то в расчете принимаем, что является изотропным материалом;

2 Коэффициенты теплопроводности λ, теплоемкости C и температуропроводности a от температуры и давления не зависят;

3 В пределах температурного поля не происходит никаких изменений агрегатного состояния, что характерно для термообработки древесины [7-10].

При решении дифференциального уравнения используется преобразование Лапласа относительно одной из переменных величин, в данном случае времени τ, т. е.

$$L_\tau\left[t(x,\tau)\right] = \int_0^\infty t(x,\tau)\cdot e^{-gt}d\tau = T(x,g). \tag{5}$$

Тогда изображение функции правой части уравнения теплопроводности будет

$$L_\tau\left[\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 T(x,g)}{\partial x^2} = T''(x,g). \tag{6}$$

Левая часть уравнения (1), на основании свойств преобразования Лапласа для изображения производной по формуле

$$L\left[f^{(n)}(\tau)\right] = g^n F(g) - g^{(n-1)}f(0) - g^{(n-2)}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \tag{7}$$

после преобразования примет вид

$$L_\tau\left[t'(x,\tau)\right] = g \cdot T(x,g) - t(x,0) = g \cdot T(x,g) - t_2, \tag{8}$$

где $t(x,0) = t_2$ - из начальных условий, согласно зависимости (2).

Окончательно получится следующая зависимость

$$T''(x,g) - \frac{g}{a} \cdot T(x,g) + \frac{t_2}{a} = 0, \tag{9}$$

или

$$T''(x,g) - \frac{g}{a} \cdot \left[T(x,g) - \frac{t_2}{g}\right] = 0. \tag{10}$$

В уравнение (10) введем замену

$$\left[T(x,g) - \frac{t_2}{g}\right] = F(x,g). \tag{11}$$

При этом вторая производная введенной замены (11) будет соответствовать равенству

$$F''(x,g) = T''(x,g).$$

Это равенство справедливо, так как «t_2» и «g» постоянные величины, что следует из начальных условий и преобразований Лапласа. Следовательно, уравнение (10) с учетом замены (11) будет иметь следующий вид:

$$F''(x,g) - \frac{g}{a} \cdot F(x,g) = 0. \tag{12}$$

В полученном дифференциальном уравнении (12) проведем преобразование Лапласа относительно переменной по координате x. В результате использования для этого формул (5) и (7), получим

$$S^2\Phi(S,g) - S \cdot F(0,g) + F'(0,g) - \frac{g}{a}\Phi(S,g) = 0. \tag{13}$$

Решаем (13) как простое алгебраическое уравнение

$$\Phi(S,g) = \frac{S \cdot F(0,g)}{S^2 - \frac{g}{a}} + \frac{F'(0,g)}{S^2 - \frac{g}{a}}. \tag{14}$$

Введем еще одну замену

$$A = F(0,g) \text{ и } B = F'(0,g)\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}. \tag{15}$$

В этом случае уравнение (14) можно представить в следующем виде:

$$\Phi(S,g) = A\cdot\frac{S}{S^2-\frac{g}{a}} + B\cdot\frac{\sqrt{\frac{g}{a}}}{S^2-\frac{g}{a}}. \tag{16}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (16), используя при этом табличные данные, получим

$$L_x^{-1}[\Phi(S,g)] = F(x,g) = A\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x + B\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x, \tag{17}$$

но, так как

$$ch\sqrt{\frac{g}{a}}x = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{a}}x}+e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x}}{2};\ sh\sqrt{\frac{g}{a}}x = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{a}}x}-e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x}}{2}, \tag{18}$$

то уравнение (17) с учетом (18) примет вид:

$$F(x,g) = A\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x + B\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x = A_1\cdot e^{\sqrt{\frac{g}{a}}x} + B_1\cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x}, \tag{19}$$

где $A_1 = \frac{A+B}{2};\ B_1 = \frac{A-B}{2}.$

Подставляя в уравнение (19) значение (11), получим решение для $T(x,g)$

$$T(x,g) - \frac{t_2}{g} = A\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x + B\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x. \tag{20}$$

Постоянные A и B определим из граничных условий для изображения, которые после преобразования Лапласа получат следующий вид:

$$\begin{gathered} x=0;\ T(0,g) = \frac{t_1}{g} = \frac{t_2}{g} + \frac{b}{g^2}; \\ x=R;\ T(R,g) = -h\left[T(R,g) - \frac{t_2}{g}\right]. \end{gathered} \tag{21}$$

При $x = 0$ из уравнений (20) и (21) получим

$$T(0,g) = \frac{t_2}{g} + A \cdot 1 = \frac{t_2}{g} + \frac{b}{g^2}. \tag{22}$$

Из данного уравнения (22) определим параметр A

$$A = \frac{b}{g^2}. \tag{23}$$

При $x = R$ соответственно получим

$$A \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R + B\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R = -h\left[\left(A \cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R + B \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R + \frac{t_2}{g}\right) - \frac{t_2}{g}\right]. \tag{24}$$

Из уравнения (24) определим величину B

$$B = -\frac{b}{g^2}\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R + h \cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R}{\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R + h \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R}\right). \tag{25}$$

Таким образом, решение для изображения (20) будет иметь следующий вид:

$$T(x,g) - \frac{t_2}{g} = \frac{b}{g^2} \cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x - \frac{b \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2\left(cth\sqrt{\frac{g}{a}}R + h\sqrt{\frac{a}{g}}\right)} - \frac{b \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2\left(\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} + th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)}. \tag{26}$$

Для того, чтобы получить решение уравнения (26) в оригинале, рассмотрим каждое из трех составляющих правой части уравнения отдельно. Тогда для первого слагаемого запишем

$$L^{-1}\left[\frac{b}{g^2}ch\sqrt{\frac{g}{a}}x\right] = \frac{1}{2}bL^{-1}\left[\frac{1}{g^2} \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{a}}x} + \frac{1}{g^2} \cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x}\right]. \tag{27}$$

В уравнении (27) введем замену для слагаемого, не имеющего минуса в

показателе экспоненты $\sqrt{\frac{g}{a}}x = -\sqrt{\frac{a}{g}}K$ и используем для решения уравнения (27) следующую зависимость перехода от изображения к оригиналу решения

$$\frac{1}{g^{1+\frac{1}{2}n}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x} = L\left[(4\tau)^{\frac{1}{2}n} \cdot i^n \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right], \tag{28}$$

где $i \cdot erfc(U) = \int\limits_U^\infty erfc\xi \cdot d\xi$ – интеграл функции $erfc(U)$ при $U = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$;

$erfc(U) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^U e^{-U^2} dU$ – функция ошибок Гаусса.

В результате получим

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{b}{g^2} ch\sqrt{\frac{g}{a}}x \right] &= \frac{b}{2}\left[4\tau \cdot i^2 \cdot erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) + 4\tau \cdot i^2 \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] = \\ &= 2b\tau\left[i^2 \cdot erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) + i^2 \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Принимая во внимание, что

1) $erfc(-U) = 2 - erfc(U)$;

2) $i \cdot erfc(U) = \int\limits_U^\infty erfc\xi \cdot d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-U^2} - U \cdot erfc(U)$;

3) $i^2 \cdot erfc(U) = \int\limits_U^\infty i \cdot erfc\xi \cdot d\xi = \frac{1}{4}\left[erfc(U) - 2U \cdot i \cdot erfc(U) \right]$.

Решение уравнения (28) в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{b}{g^2} ch\sqrt{\frac{g}{a}}x \right] &= 2b\tau\left\{ \left[\frac{1}{4} \cdot erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) \cdot i \cdot erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \left[\frac{1}{4} \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \cdot i \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] \right\} = 2b\tau\left[\frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \right. \\ &\left. + \frac{x}{4\sqrt{a\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)^2} + \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)^2 - \frac{x^2}{8a\tau} \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{4} \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{x}{4\sqrt{a\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)^2} + \frac{x^2}{8a\tau} \cdot erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] = \\ &= 2b\tau\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4a\tau} \right) = b\tau + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot x^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части уравнения (26), числитель которого умножим и разделим на $\left(\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)$ для того, чтобы избавиться от неопределенности в решении:

$$\frac{b\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2\left(cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\sqrt{\frac{a}{g}}\right)}=\frac{b\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x}\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)}=\frac{\frac{b}{a}\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x}}{g\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)}=$$

$$=\frac{\frac{b}{a}\cdot x\left[1+\left(\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)^2\cdot\frac{1}{3!}+\left(\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)^4\cdot\frac{1}{5!}+\ldots\right]}{g\left[\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1+2\cdot e^{-2\sqrt{\frac{g}{a}}R}+2\cdot e^{-4\sqrt{\frac{g}{a}}R}+2\cdot e^{-6\sqrt{\frac{g}{a}}R}+\ldots\right)+h\right]}=\frac{\varphi_1(g)}{\psi_1(g)}. \qquad (31)$$

Данное выражение (31) представляет отношение двух обобщенных полиномов относительно g, причем полином стоящий в знаменателе не содержит свободного члена. Следовательно, условия обобщенной теоремы разложения соблюдены и ею можно воспользоваться для перехода выражения (31) к решению для оригинала

$$L_\tau^{-1}\left[\frac{\varphi_1(g)}{\psi_1(g)}\right]=\sum_{n=1}^{n}\frac{\varphi_1(g)}{\psi_1(g)}\cdot e^{g_n\tau}, \qquad (32)$$

где g_n – корни полинома $\psi_1(g)$.

Определим корни $\psi_1(g)$, для чего приравняем полином знаменателя (31) к нулю,

$$\psi_1(g)=g\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)=g\left(\frac{\mu}{R}\cdot cth\mu+h\right)=0. \qquad (33)$$

Получаем: 1) простой корень $g_0=0$; 2) бесчисленное множество корней $g_n=-\frac{a}{R^2}\cdot\mu_n^2$, определяемых из уравнения (33), в котором имеем $\mu=i\sqrt{\frac{g}{a}}R.$

Из уравнения (33) получим

$$cth\mu=-\frac{Bi}{\mu}, \qquad (34)$$

где $Bi=h\cdot R.$

Для применения обратного преобразования Лапласа с использованием

теоремы разложения (32) определим $\psi_1'(g)$

$$\psi_1'(g) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot cth\sqrt{\frac{g}{a}}R + h\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{gR}{a \cdot \sin^2 \mu}. \tag{35}$$

В уравнении (35) выражение в скобках равно нулю на основании равенства (33). На основании этого имеет

$$\lim_{g \to 0} \psi_1'(g) = -\frac{1}{2}h;$$

$$\lim_{g \to g_n} \psi_1'(g) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{g_n}{a} \cdot R \cdot \frac{1}{\sin^2 \mu_n} - h\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\mu_n^2}{R \cdot \sin^2 \mu_n} - h\right) = -\frac{\mu_n^2 + Bi \cdot \sin^2 \mu_n}{2 \cdot R \cdot \sin^2 \mu_n}.$$

Определим $\varphi_1(g)$ при различных корнях

$$\varphi_1(0) = \frac{b}{a}x;$$

$$\varphi_1(g_n) = \frac{b}{a} \cdot \frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x} = \frac{bR}{a} \cdot \frac{\sin \mu_n \frac{x}{R}}{\mu_n}.$$

Окончательно для второго выражения имеем

$$\begin{aligned} L_\tau^{-1}\left[\frac{\varphi_1(g)}{\psi_1(g)}\right] &= -2\frac{bx}{ah} - 2\frac{bR^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \mu_n \frac{x}{R} \cdot \sin^2 \mu_n}{\mu_n^3 + \mu_n \cdot Bi \cdot \sin^2 \mu_n} = \\ &= -2\frac{bx}{ah} - 2\frac{bR^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \mu_n \frac{x}{R}}{\mu_n\left(Bi + Bi^2 + \mu_n^2\right)} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Третье слагаемое правой части уравнения (26) находим аналогично второму слагаемому (31)

$$\frac{b \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2\left(\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} + th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)} = \frac{b \cdot \frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2 \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}\left(\frac{1}{h} + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)} = \frac{bx \cdot \frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x}}{g^2\left(\frac{1}{h} + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)} =$$

$$= \frac{bx \cdot \left[1 + \left(\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^4 \cdot \frac{1}{5!} + \ldots\right]}{g^2 \cdot \left[\frac{1}{h} + \sqrt{\frac{g}{a}}\left(1 - 2 \cdot e^{-2\sqrt{\frac{g}{a}}R} + 2 \cdot e^{-4\sqrt{\frac{g}{a}}R} + 2 \cdot e^{-6\sqrt{\frac{g}{a}}R} + \ldots\right)\right]} == \frac{\varphi_2(g)}{g^2 \cdot \psi_2(g)}. \quad (37)$$

Выражение (37) также представляет отношение двух обобщенных полиномов относительно (g), причем полином в знаменателе не содержит свободного члена и имеет двукратный корень. Теоремой разложения воспользуемся согласно формулы

$$f(\tau) = \frac{1}{(K-1)!} \cdot \lim_{g \to g_n} \left\{ \frac{d^{K-1}}{dg^{K-1}} \left[\frac{\varphi_2(g)(g - g_n)^K}{\psi_2(g)} \cdot e^{g\tau} \right] \right\}. \quad (38)$$

Для этой цели определим корни решения, приравнивая знаменатель выражения (37) к нулю

$$g^2\left(\frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{a}} + th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right) = 0;$$
$$\frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{a}} + th\sqrt{\frac{g}{a}}R = \mu \cdot ctg\mu + Bi = 0. \quad (39)$$

Получаем: 1) $g_0 = 0$ - двукратный корень; 2) $g_n = \frac{a}{R^2} \cdot \mu_n^2$ - бесчисленное множество корней, где $\mu = i\sqrt{\frac{g}{a}}R.$

Из уравнения (39) получим

$$ctg\mu = -\frac{Bi}{\mu},$$

где $Bi = h \cdot R.$

Используя теорему разложения (38) при двукратном нулевом корне, получим

$$\lim_{g \to 0}\left\{\frac{d}{dg}\left[\frac{\phi_2(g)}{\psi_2(g)} \cdot e^{g\tau}\right]\right\} = \lim_{g \to 0}\left[\tau \cdot e^{g\tau} \cdot \frac{\phi_2(g)}{\psi_2(g)} + e^{g\tau} \cdot \frac{\phi_2'(g)}{\psi_2(g)} - e^{g\tau} \cdot \frac{\phi_2(g) \cdot \psi_2'(g)}{\left[\psi_2(g)\right]^2}\right] = \tau \cdot h \cdot b \cdot x, \quad (40)$$

так как

$$\varphi_2(0) = bx;\ \varphi_2'(0) = 0;\ \psi_2(0) = \frac{1}{h};\ \psi_2'(0) = 0. \quad (41)$$

Для остальных корней воспользуемся теоремой разложения (32). Для этой цели определим $\psi_2'(g_n)$ и $\varphi_2(g_n)$

$$\psi_2'(g_n) = \frac{R}{2g_n \cdot \cos^2 \mu_n} - \frac{1}{2g_n}\sqrt{\frac{a}{g_n}} \cdot th\sqrt{\frac{g_n}{a}}R = \frac{1}{2g_n}\left(\frac{R}{\cos^2 \mu_n} + \frac{1}{h}\right) = -\frac{R^2}{2a\mu_n^2}\left(\frac{R}{\cos^2 \mu_n} + \frac{1}{h}\right);$$

$$\varphi_2(g_n) = b \cdot \frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}} = bR \cdot \frac{\sin \mu_n \cdot \frac{x}{R}}{\mu_n}.$$

Далее

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2(g_n)}{\psi_2'(g_n)} \cdot e^{g_n \tau} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a \cdot b \cdot h}{R} \cdot \frac{\mu_n \cdot \cos^2 \mu_n}{Bi + \cos^2 \mu_n} \cdot \sin \mu_n \frac{x}{R} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right) =$$

$$= -\frac{2a \cdot b \cdot h}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \cdot Bi \cdot \sin \mu_n \frac{x}{R}}{Bi + Bi^2 + \mu_n^2} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right).$$

Тогда оригинал третьего слагаемого будет

$$L_\tau^{-1}\left[\frac{b \cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g^2\left(\frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{a}} + th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)}\right] = \tau \cdot h \cdot b \cdot x - \frac{2a \cdot b \cdot h}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \cdot Bi \cdot \sin \mu_n \frac{x}{R}}{Bi + Bi^2 + \mu_n^2} \cdot \exp\left(-\mu_n \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right).$$

Окончательно аналитическое уравнение, определяющее температурное поле прессованной древесины при интенсивном нагреве ее изнутри, когда измерение температурного поля в древесине соответствует линейному закону, будет иметь вид

$$t(x,\tau) - t_2 = b\tau + \frac{bx^2}{2a} + 2\frac{bR^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \frac{x}{R}}{\mu_n\left(Bi + Bi^2 + \mu_n^2\right)} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right) - \tau \cdot b \cdot h \cdot x +$$
$$+ \frac{2abh}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \cdot Bi \cdot \sin \mu_n \frac{x}{R}}{Bi + Bi^2 + \mu_n^2} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{R^2}\right). \quad (42)$$

Окончательно после преобразования уравнение (42) примет вид

$$t(x,\tau) - t_2 = b\left[\tau(1 - hx) + \frac{x}{a}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{h}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{R^2}{a \cdot Bi \cdot \mu_n} \cdot \sin \mu_n \frac{x}{R} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot F_0\right)\right], \quad (43)$$

где $A_n = \frac{2Bi\sqrt{Bi^2 + \mu_n^2}}{\mu_n\left(Bi + Bi^2 + \mu_n^2\right)} \cdot (-1)^{n+1}$ – начальная тепловая амплитуда; $Bi = hR$ – критерий Био; $F_0 = \frac{a\tau}{R^2}$ – критерий Фурье; μ_n – корни характеристического уравнения; b – коэффициент, характеризующий скорость повышения температуры.

Полученное аналитическое уравнение (43) позволяет анализировать температурное поле прессованной древесины при линейном законе ее изменения внутри древесины в зависимости от времени нагрева τ СВЧ электромагнитной энергией.

Теоретические исследования по установлению закономерности тепло- и массопереноса внутри бруска древесины при его обработке СВЧ электромагнитной энергией (нагрев изнутри) в дальнейшем должен быть рассмотрен с учетом реологических процессов, происходящих в древесине бруска, зажатом в кассете.

Совмещая теоретические исследования тепло- и массопереноса с реологией напряжений в процессе обработки древесины в напряженном состоянии СВЧ электромагнитной энергией можно составить общую математическую модель процесса и, тем самым, раскрыть сущность протекающих сложных явлений при термообработке древесины в сжатом состоянии полем СВЧ электромагнитной энергии.

Библиографический список

1 Анненков, В. Ф. Древесно-полимерные материалы и технология их получения [Текст] / В. Ф. Анненков. – М. : Лесная промышленность, 1974. – 87 с.

2 Аксенов, А. А. Твердость и деформации прессованной древесины при отрицательных температурах [Текст] / А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Лесотехнический журнал. – 2014. – Т. 4. – № 3 (15). – С. 184-192.

3 Шамаев, В. А. Технология и оборудование химико-механического модифицирования древесины карбамидом [Текст]: автореф. ... д-ра техн. наук: 05.21.05 / В. А. Шамаев ; Воронеж. гос. лесотехн. акад. – Воронеж, 1995. – 35 с.

4 Аксенов, А. А. Исследование основных теплофизических свойств модифицированной древесины как антифрикционного материала [Текст] / А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Вестник АПК Ставрополья. – 2015. – № 4 (20). – С. 7-11.

5 Al-Haddad J. M. Chemical responses to modified lignin composition in tension wood of hybrid poplar (populus tremula × populus alba) [Text] / J. M. Al-Haddad, F. W. Telewski, K.-Y. Kang, S. D. Mansfield // Tree Physiology. – 2013. –

Vol. 33. – no. 4. – pp. 365-373 DOI : 10.1093/treephys/tpt017

6 Малюков, С. В. Анализ процессов тепломассообмена при сушке древесины с термообработкой СВЧ электромагнитной энергией [Текст] / С. В. Малюков, А. А. Аксенов // В сборнике : Севергеоэкотех-2016 Доклады XVII Международной молодежной научной конференции. – 2016. – С. 25-30

7 Шамаев, В. А. Химико-механическое модифицирование древесины [Текст] : монография / В. А Шамаев. – Воронеж, 2003. – 260 с.

8 Temiz A. Effect of accelerated weathering on surface chemistry of modified wood [Text] / A. Temiz, N. Terziev, M. Eikenes, J. Hafren // Applied Surface Science. 2007. Vol. 253. no. 12. pp. 5355-5362 DOI: 10.1016/j.apsusc.2006.12.005.

9 Аксенов, А. А. Исследования зависимости триботехнических свойств сильно нагруженных подшипников из модифицированной древесины [Текст] / А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Лесотехнический журнал. – 2016. – Т. 6. – № 1 (21). – С. 168-185. – DOI : 10.12737/18740.

10 Duanmu J. Hygromechanical properties of composites of crosslinked allylglycidyl-ether modified starch reinforced by wood fibres [Text] / J. Duanmu, E. K. Gamstedt, A. Rosling // Composites Science and Technology. – 2007. – Vol. 67. – no. 15-16. – pp. 3090-3097. – DOI : 10.1016/j.compscitech.2007.04.027.