УДК 517. 95

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Р. К. Тагиев, Р. С. Касымова
Бакинский государственный университет
E-mail: r.tagiyev@list.ru

В работе А. Н. Тихонова [1] предложена идея использования методов оптимального управления для решения обратных задач. Дело в том, что обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены в вариационной форме, т. е. как задачи оптимального управления соответствующими системами. При этом роль причинных характеристик выполняют управляющие воздействия, вследствие изменения которых реализуется тот или иной эффект управления. Эффект управления обычно определяется критериями качества составленные на основе дополнительной информации для состояния системы. Управляющие воздействия должны быть определены таким образом, чтобы получить наилучший эффект управления. Определение управляющих воздействий по состоянию системы можно трактовать как обратную задачу типа управления.

Если управляющие воздействия входят в коэффициенты уравнений состояния, то такие обратные задачи называют коэффициентными обратными задачами типа управления. В работах [2-9] и др. исследовались коэффициентные обратные задачи типа управления для уравнений с частными производными. Во многих этих работах дополнительные условия для состояния системы являются локальными. Коэффициентные обратные задачи типа управления с дополнительными нелокальными условиями мало изучены [9].

В данной работе рассматривается коэффициентная обратная задача типа управления для эллиптического уравнения с критерием качества, соответствующей дополнительному интегральному условию. Исследованы вопросы корректности постановки обратной задачи типа управления. Доказана дифференцируемость по Фреше критерия качества и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

1 Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(\upsilon)=\int_0^1\left|u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(x_1,x_2)u(x_1,x_2;\upsilon)dx_1\right|^2 dx_2, \qquad (1)$$

на решениях $u(x)=u(x\ ;\upsilon)=u(x_1,x_2;\upsilon)$ краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+q(x)u=f(x),\ x\in\Omega, \qquad (2)$$

$$-\upsilon(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}=g(x),\ x\in\Gamma_{-1}, \qquad (3)$$

$$u(x;\upsilon)=0,\ x\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}, \qquad (4)$$

соответствующих всем допустимым управлениям $\upsilon=\upsilon(x_2)$ из множества

$$V=\left\{\upsilon=\upsilon(x_2)\in W_2^1(0,1):0<\nu\le\upsilon(x_2)\le\mu,|\upsilon'(x_2)|\le\mu_1\ п.в.на\ (0,1)\right\}. \qquad (5)$$

Здесь $\Omega=\{x=(x_1,x_2):0<x_i<1,i=1,2\}$ – квадрат в R^2 с границей Γ, $\Gamma_{-1}=\{x=(0,x_2):0<x_2<1\}$ – левая вертикальная сторона квадрата Ω, $H(x)=H(x_1,x_2)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(x)=g(0,x_2)\equiv g(x_2)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$H(x)\in W_\infty^{0,1}(\Omega),\ q(x)\in L_\infty(\Omega),\ f(x)\in L_2(\Omega),\ g(x_2)\in W_2^1(0,1);\ |H(x)|\le d_1,|\partial H(x)/\partial x_2|\le d_2\ \text{п.в.}$$
$$\text{на}\ \Omega,0<q_1\le q(x)\le q_2,\ d_1,d_2,q_1,q_2=const>0.$$

Обозначения используемых в работе функциональных пространств соответствуют принятым в [10, с. 27]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величии и допустимых управлений обозначаем через M.

Под решением краевой задачи (2) – (4), соответствующим управлению $\upsilon\in V$, будем понимать обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$, т. е. функцию $u(x)=u(x;\upsilon)$ из $W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{2}\upsilon(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+q(x)u\eta\right]dx=\int_\Omega f(x)\eta dx+\int_0^1 g(x_2)\eta(0,x_2)dx_2\ , \qquad (6)$$

для всех $\forall\eta=\eta(x)\in W_{2,0}^1(\Omega)$. Здесь $W_{2,0}^1(\Omega)$ – подпространство пространства

$W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю в близи $\Gamma \setminus \Gamma_{-1}$.

При сделанных предположениях краевая задача (2) – (4) однозначно разрешима при каждом заданном $\upsilon \in V$ [10, с. 200]. Кроме того, можно показать, что обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи (2) – (4) принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяет уравнению (2) при почти всех $x \in \Omega$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \le M\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right]. \tag{7}$$

Отсюда и из ограниченности вложений $W_{2,0}^2(\Omega) \to W_2^1(\Gamma_{-1})$, $W_{2,0}^1(\Omega) \to L_4(\Omega)$ [11, с. 78] следует, что также верна оценка

$$\|u\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)} + \|u_x\|_{4,\Omega} \le M\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right]. \tag{8}$$

Из условия $|H(x)| \le d_1$ п. в. на Ω и из оценок (7), (8) следует, что функционал (1) определен на V и принимает конечные значения.

Задача (1) – (5) тесно связана с коэффициентной обратной задачей, заключающейся в определении функций $\{\upsilon(x_2), u(x)\}$, удовлетворяющих условиям (2) – (5) и дополнительному интегральному условию

$$u(0, x_2) = \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2) dx_1, 0 < x_2 < 1. \tag{9}$$

Целевой функционал (1) является функционалом невязки в $L_2(0,1)$, соответствующей условию (9). Если в задаче (1) – (5) окажется, что существует управление $\upsilon_* \in V$ такое, что $J(\upsilon_*) = J_* \equiv \inf\{J(\upsilon) : \upsilon \in V\} = 0$, то это управление решает обратную задачу (2) – (5), (9).

Задача (1) – (5) является задачей оптимального управления для эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах. Такие задачи в других постановках исследованы в работах [12-14] и др.

2 Корректность постановки задачи

Следующая теорема показывает, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства $W_2^1(0,1)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда множество оптимальных управлений задачи (1) – (5) $V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_*\}$ не пусто, слабо компактно в $W_2^1(0,1)$ и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n\} \subset V$ функционала (1) слабо в $W_2^1(0,1)$ сходится к множеству V_*.

Доказательство. Покажем, что функционал (1) слабо в $W_2^1(0,1)$ непрерывен на множестве V. Пусть $\upsilon \in V$ – некоторый элемент, $\{\upsilon_n\} \subset V$ – произвольная последовательность, такая, что

$$\upsilon_n(x_2) \to \upsilon(x_2) \quad \text{слабо в } W_2^1(0,1). \tag{10}$$

Из (10) и компактности вложения $W_2^1(0,1) \to C[0,1]$ [11, с.78] следует, что

$$\upsilon_n(x_2) \to \upsilon(x_2) \quad \text{сильно в } C[0,1]. \tag{11}$$

Кроме того, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (2) – (4), каждому управлению $\upsilon_n \in V$ соответствует единственное решение $u_n(x) = u(x;\upsilon_n)$ из $W_{2,0}^2(\Omega)$ задачи (2) – (4) и справедлива оценка

$$\|u_n\|_{2,\Omega}^{(2)} \le M, n = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

т. е. последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Тогда из (12) и компактности вложений $W_{2,0}^2(\Omega) \to W_{2,0}^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega) \to W_2^1(\Gamma_{-1})$ следует, что из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_m}\}$ такую, что

$$u_{n_m}(x) \to u(x) \quad \text{слабо в } W_{2,0}^2(\Omega),$$

$$\text{сильно в } W_{2,0}^1(\Omega) \text{ и в } W_2^1(\Gamma_{-1}), \tag{13}$$

где $u(x)$ – некоторый элемент из $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Покажем, что $u(x) = u(x;\upsilon)$, $x \in \Omega$, т. е. $u(x)$ является решением задачи (2) – (4), соответстующим управлению $\upsilon \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{2}\upsilon_{n_m}(x_2)\frac{\partial u_{n_m}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+q(x)u_{n_m}\eta\right]dx=\int_{\Omega}f(x)\eta dx+\int_0^1 g(x_2)\eta(0,x_2)dx_2,$$

$$\forall\eta=\eta(x)\in W_{2,0}^1(\Omega). \qquad (14)$$

Используя ограничение $0<\nu\le\upsilon(x_2)\le\mu$ п.в. на Ω, неравенство Коши – Буняковского и соотношения (11), (13), получаем

$$\left|\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\upsilon_{n_m}(x_2)\frac{\partial u_{n_m}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\upsilon(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx\right|\le$$

$$\le\left|\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\upsilon_{n_m}(x_2)\left(\frac{\partial u_{n_m}}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx\right|+\left|\int_{\Omega}\left[\upsilon_{n_m}(x_2)-\upsilon(x_2)\right]\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx\right|\le$$

$$\le\mu\left\|\frac{\partial u_{n_m}}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\cdot\left\|\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}+\left\|\upsilon_{n_m}(x_2)-\upsilon(x_2)\right\|_{C[0,1]}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\cdot\left\|\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\to 0, \qquad (15)$$

при $m\to\infty$.

Тогда переходя к пределу при $m\to\infty$ в равенстве (14) и учитывая соотношения (13), (15) получаем, что функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству (6). Отсюда и из включения $u(x)\in W_{2,0}^2(\Omega)$ следует, что $u(x)=u(x;\upsilon)$, т.е. $u(x)$ является решением задачи (2) – (4), соответстующим управлению $\upsilon\in V$.

Используя единственность решения задачи (1) – (3), соответстующего управлению $\upsilon\in V$ нетрудно показать, что соотношение (13) с функцией $u(x)=u(x;\upsilon)$ справедливо не только для подпоследовательности $\{u_{n_m}\}$, но и для всей последовательности $\{u_n\}$, т. е.

$$u_n(x)=u(x;\upsilon_n)\to u(x)=u(x;\upsilon) \quad \text{слабо в } W_{2,0}^2(\Omega),$$

$$\text{сильно в } W_{2,0}^1(\Omega) \text{ и в } W_2^1(\Gamma_{-1}). \qquad (16)$$

Покажем, что $J(\upsilon_n)\to J(\upsilon)$ при $n\to\infty$. Используя равенство (1), очевидное неравенство $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, неравенство Коши – Буняковского и условию $|H(x)|\le d_1$ п.в. на Ω, имеем

$$|J(\upsilon_n)-J(\upsilon)|\le\left\{\int_0^1\left[|u(0,x_2;\upsilon_n)-u(0,x_2;\upsilon)|+\right.\right.$$

$$+\int_0^1 |H(x_1,x_2)|\cdot|u(x_1,x_2;\upsilon_n)-u(x_1,x_2;\upsilon)|dx_1\Bigg]^2 dx_2\Bigg\}^{1/2}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_0^1\Bigg[|u(0,x_2;\upsilon_n)|+|u(0,x_2;\upsilon)|+\int_0^1|H(x_1,x_2)|\cdot|u(x_1,x_2;\upsilon_n)|dx_1+$$

$$+\int_0^1|H(x_1,x_2)|\cdot|u(x_1,x_2;\upsilon)|dx_1\Bigg]^2 dx_2\Bigg\}^{1/2}\le 2\sqrt{2}\Bigg\{\int_0^1\Big[|u(0,x_2;\upsilon_n)-u(0,x_2;\upsilon)|^2+$$

$$+\int_0^1 H^2(x_1,x_2)dx_1\cdot\int_0^1|u(x_1,x_2;\upsilon_n)-u(x_1,x_2;\upsilon)|^2dx_1\Big]dx_2\Bigg\}^{1/2}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_0^1\Big[|u(0,x_2;\upsilon_n)|^2+|u(0,x_2;\upsilon)|^2+\int_0^1 H^2(x_1,x_2)dx_1\cdot\int_0^1|u\ (x_1,x_2;\upsilon_n)|^2dx_1+$$

$$+\int_0^1 H^2(x_1,x_2)dx_1\cdot\int_0^1|u(x_1,x_2;\upsilon)|^2dx_1\Big]dx_2\Bigg\}^{1/2}\le 2\sqrt{2}\Big[\|u_n-u\|_{2,\Gamma_{-1}}+d_1\|u_n-u\|_{2,\Omega}\Big]\times$$

$$\times\Big[\|u_n\|_{2,\Gamma_{-1}}+\|u\|_{2,\Gamma_{-1}}+d_1\big(\|u_n\|_{2,\Omega}+\|u\|_{2,\Omega}\big)\Big].$$

Отсюда используя оценки (7), (8), (12) и соотношения (15) получаем, что $J(\upsilon_n)\to J(\upsilon)$ при $n\to\infty$, т. е. функционал $J(\upsilon)$ слабо в $W_2^1(0,1)$ непрерывен на V. Кроме того, множество V, определяемое равенством (5), выпукло, замкнуто и ограничено в гильбертовом пространстве $W_2^1(0,1)$ и поэтому слабо компактно в $W_2^1(0,1)$ [15, с. 51]. Тогда применяя результаты из [15, с. 49] получаем, что справедливы утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Дифференцируемость целевого функционала и условие оптимальности

Пусть $\psi=\psi(x)=\psi(x;\upsilon)$ – обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ сопряженной краевой задачи, соответствующей задаче (1) – (5)

$$-\sum_{i=1}^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)+q(x)\psi=$$

$$=-2H(x_1,x_2)\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right],x\in\Omega, \qquad (17)$$

$$-\upsilon(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=2\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right],\ x\in\Gamma_{-1}, \tag{18}$$

$$\psi(x;\upsilon)=0,\ x\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}. \tag{19}$$

Под решением краевой задачи (17) – (19), соответствующим управлению $\upsilon\in V$, будем понимать обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$, т. е. функцию $\psi(x)=\psi(x;\upsilon)\in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^2\upsilon(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+q(x)\psi\eta\right]dx=$$

$$=-2\int_\Omega H(x_1,x_2)\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)dx_1\right]\eta dx-$$

$$-2\int_0^1\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)dx_1\right]\eta(0,x_2)dx_2, \tag{20}$$

при любой функции $\eta=\eta(x)\in W_{2,0}^1(\Omega)$.

Введем обозначения:

$$F(x)=-2\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right]H(x_1,x_2),x\in\Omega,$$

$$p(x_2)=2\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right],x_2\in(0,1).$$

Покажем, что $F(x)\in L_2(\Omega)$, $p(x_2)\in W_2^1(0,1)$. Используя очевидное неравенство $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, неравенство Коши – Буняковского и ограничения $|H(x)|\le d_1, |\partial H(x)/\partial x_2|\le d_2$ п.в. на Ω, имеем

$$\int_\Omega F^2(x)dx=4\int_\Omega\left|u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right|^2 H^2(x)dx\le$$

$$\le 8\int_\Omega\left[\int_0^1 u^2(0,x_2;\upsilon)+\int_0^1 H^2(\xi_1,x_2)d\xi_1\cdot\int_0^1 u^2(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right]H^2(x)dx\le$$

$$\leq 8d_1^2\left[\|u\|_{2,\Gamma_{-1}}^2 + d_1^2\|u\|_{2,\Omega}^2\right], \tag{21}$$

$$\int_0^1\left[|p(x_2)|^2 + |p'(x_2)|^2\right]dx_2 = 4\int_0^1\left\{\left|u(0,x_2;\upsilon) - \int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial u(0,x_2;\upsilon)}{\partial x_2} - \int_0^1 \frac{\partial H(\xi_1,x_2)}{\partial x_2}u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1 - \int_0^1 H(\xi_1,x_2)\frac{\partial u(\xi_1,x_2;\upsilon)}{\partial x_2}d\xi_1\right|^2\right\}dx_2 \leq$$

$$\leq 4\int_0^1\left[2u^2(0,x_2;\upsilon) + 2\int_0^1 H^2(\xi_1,x_2)d\xi_1 \cdot \int_0^1 u^2(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1 + 2\left|\frac{\partial u(0,x_2;\upsilon)}{\partial x_2}\right|^2 + \right.$$

$$+ 4\int_0^1\left|\frac{\partial H(\xi_1,x_2)}{\partial x_2}\right|^2 d\xi_1 \cdot \int_0^1 u^2(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1 + 4\int_0^1 H^2(\xi_1,x_2)d\xi_1 \times$$

$$\left. \times \int_0^1\left|\frac{\partial u(\xi_1,x_2;\upsilon)}{\partial x_2}\right|^2 d\xi_1\right]dx_2 \leq 8\left[\|u\|_{2,\Gamma_{-1}}^2 + d_1^2\|u\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{2,\Gamma_{-1}}^2 + \right.$$

$$\left. + 2d_2^2\|u\|_{2,\Omega}^2 + 2d_1^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{22}$$

Отсюда и из оценок (7), (8) следует, что $F(x) \in L_2(\Omega)$, $p(x_2) \in W_2^1(0,1)$.

Тогда из результатов монографии [10, с. 200] следует, что краевая задача (17) – (19) однозначно разрешима в $W_{2,0}^1(\Omega)$ при каждом функсированном $\upsilon \in V$, его обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(2)} \leq M\left[\|F\|_{2,\Omega} + \|p\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right].$$

Учитывая здесь оценки (21), (22), (7), получаем

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(2)} \leq M\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right]. \tag{23}$$

Отсюда и из ограниченности вложений $W_{2,0}^2(\Omega) \to W_2^1(\Gamma_{-1})$, $W_{2,0}^1(\Omega) \to L_4(\Omega)$ [11, с. 78] следует, что верна также оценка

$$\|\psi\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)} + \|\psi_x\|_{4,\Omega} \leq M\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right]. \tag{24}$$

Введем еще одну вспомогательную краевую задачу для определения функции $\omega(x_2)=\omega(x_2;\upsilon)$ из условий

$$-\omega''+\omega=\int_0^1\sum_{i=1}^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_1, 0<x_2<1, \tag{25}$$

$$\omega'(0)=\omega'(1)=0. \tag{26}$$

Под решением краевой задачи (25), (26) при фиксированном $\upsilon\in V$, будем понимать функцию $\omega(x_2)=\omega(x_2;\upsilon)\in W_2^1(0,1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^1(\omega'\eta'+\omega\eta)dx_2=\int_0^1\left(\int_0^1\sum_{i=1}^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_1\right)\eta dx_2, \tag{27}$$

при любой функции $\eta=\eta(x_2)\in W_2^1(0,1)$.

Из включений $\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\in L_4(\Omega)$ следует, что правая часть уравнения (25) принадлежит пространству $L_2(0,1)$. Тогда из результатов работы [10, с. 200] следует, что краевая задача (25), (26), при заданном $\upsilon\in V$, имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(0,1)$ и справедлива оценка

$$\|\omega\|_{2,(0,1)}^{(1)}\le M\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{4,\Omega}\cdot\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\|_{4,\Omega}.$$

Отсюда и из оценок (8), (24) следует, что верна оценка

$$\|\omega\|_{2,(0,1)}^{(1)}\le M\left(\|f\|_{2,\Omega}+\|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right). \tag{28}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия при постановке задачи (1) – (5). Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его градиент в произвольной точке $\upsilon\in V$ определяется равенством

$$J'(\upsilon)=\omega(x_2;\upsilon), 0<x_2<1. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon,\upsilon+\Delta\upsilon\in V$ – произвольные управления,

$\Delta\upsilon \in W_2^1(0,1)$ и $\Delta u(x) = u(x;\upsilon + \Delta\upsilon) - u(x;\upsilon)$, $x \in \Omega$. Из (6) следует, что Δu удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2} (\upsilon(x_2) + \Delta\upsilon(x_2)) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + q\Delta u \eta \right] dx =$$
$$= -\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Delta\upsilon(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx, \forall \eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \quad (30)$$

Для функции Δu справедлива оценка [10, с. 200]:

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M \sum_{i=1}^{2} \left\| \Delta\upsilon \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{2,\Omega}, \quad (31)$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и оценки (7), имеем

$$\sum_{i=1}^{2} \left\| \Delta\upsilon \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{2,\Omega} \le \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)} \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{2,\Omega} \le M \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)}.$$

Учитывая эту оценку в (31), получаем

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)}. \quad (32)$$

Отсюда и из ограниченности вложения $W_{2,0}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma_{-1})$ следует, что верна также оценка

$$\|\Delta u\|_{2,\Gamma_{-1}} \le M \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)}. \quad (33)$$

Приращение функционала (1) имеет вид

$$\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon + \Delta\upsilon) - J(\upsilon) = 2\int_0^1 \left\{ \left[u(0,x_2;\upsilon) - \int_0^1 H(x_1,x_2) u(x_1,x_2;\upsilon) dx_1 \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[\Delta u(0,x_2) - \int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right] \right\} dx_2 +$$
$$+ \int_0^1 \left| \Delta u(0,x_2) - \int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right|^2 dx_2 . \quad (34)$$

Если в тождество (20) положим $\eta = \Delta u$, а в (30) положим $\eta = \psi$ и полученные равенства вычтем, то получим равенство

$$2\int_0^1 \left\{ \left[u(0,x_2;\upsilon) - \int_0^1 H(x_1,x_2) u(x_1,x_2;\upsilon) dx_1 \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\Delta u(0,x_2) - \int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right] \right\} dx_2 =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Delta\upsilon(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Delta\upsilon(x_2) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx .$$

Учитывая это равенство в (34), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Delta\upsilon dx + R , \tag{35}$$

где

$$R = \int_0^1 \left| \Delta u(0,x_2) - \int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right|^2 dx_2 +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Delta\upsilon(x_2) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx . \tag{36}$$

Полагая в (27) $\eta = \Delta\upsilon$ и учитывая полученное равенство в (35), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \int_0^1 (\omega' \Delta\upsilon' + \omega \Delta\upsilon) dx_2 + R . \tag{37}$$

Теперь проведем оценку остаточного члена R, определяемый равенством (36). Используя (36), очевидное неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$, неравенство Коши – Буняковского и оценки (32), (33), (23) получаем

$$|R| \le 2\int_0^1 \left[|\Delta u(0,x_2)|^2 + \left(\int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right)^2 \right] dx_2 +$$

$$+\|\Delta\upsilon\|_{C[0,1]}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial\Delta u}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\cdot\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\le 2\left[\|\Delta u\|_{2,\Gamma_{-1}}^2+d_1^2\|\Delta u\|_{2,\Omega}^2\right]+$$

$$+\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial\Delta u}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\cdot\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}\le M\left(\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)}\right)^2.$$

Учитывая это неравенство в (35), получаем, что функцонал (1) дифференцируем по Фреше на множестве V.

Покажем, что отображение $\upsilon\to J'(\upsilon)$ непрерывно действует из $W_2^1(0,1)$ в $W_2^1(0,1)$. Пусть $\Delta\psi(x)=\psi(x;\upsilon+\Delta\upsilon)-\psi(x;\upsilon)$,
$\psi(x)=\psi(x;\upsilon)$, $\Delta\omega(x_2)=\omega(x_2;\upsilon+\Delta\upsilon)-\omega(x_2;\upsilon)$, $\omega(x_2)=\omega(x_2;\upsilon)$.

Из (20) следует, что функция $\Delta\psi(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{2}(\upsilon(x_2)+\Delta\upsilon(x_2))\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+q\Delta\psi\eta\right]dx=-\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\Delta\upsilon(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx-$$

$$-2\int_\Omega\left[\Delta u(0,x_2)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)\Delta u(\xi_1,x_2)d\xi_1\right]H(x)\eta dx-$$

$$-2\int_0^1\left[\Delta u(0,x_2)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)\Delta u(\xi_1,x_2)d\xi_1\right]\eta(0,x_2)dx_2.$$

Для функции $\Delta\psi$ справедлива оценка [10, с. 200]

$$\|\Delta\psi\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\left\{\sum_{i=1}^{2}\left\|\Delta\upsilon\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}+\right.$$

$$+\left\|\left[\Delta u(0,x_2)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)\Delta u(\xi_1,x_2)d\xi_1\right]H(x)\right\|_{2,\Omega}+$$

$$\left.+\left\|\Delta u(0,x_2)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)\Delta u(\xi_1,x_2)d\xi_1\right\|_{2,\Gamma_{-1}}\right\}.$$

Оценивая правую часть этого неравенства и используя оценки (23), (32) и (33) получаем оценку

$$\|\Delta\psi\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\|\Delta\upsilon\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}. \qquad (38)$$

Из (25), (26) следует, что $\Delta\omega$ является обобщенным решением из $W_2^1(0,1)$ краевой задачи

$$-\Delta\omega'' + \Delta\omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2} \left(u_{x_i} \Delta\psi_{x_i} + \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} + \Delta u_{x_i} \Delta\psi_{x_i} \right) dx_1 ,$$

$$\Delta\omega'(0) = \Delta\omega'(1) = 0 .$$

Для решения этой задачи справедлива оценка [10, с. 200]:

$$\|\Delta\omega\|_{2,(0,1)}^{(1)} \le M \left\| \int_0^1 \sum_{i=1}^{2} \left(u_{x_i} \Delta\psi_{x_i} + \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} + \Delta u_{x_i} \Delta\psi_{x_i} \right) dx_1 \right\|_{2,(0,1)} .$$

Оценивая правую часть этого неравенства и используя оценки (8), (24), (31) и (35) получаем оценку

$$\|\Delta\omega\|_{2,(0,1)}^{(1)} \le M \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)} \cdot \left[1 + \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)} \right].$$

Отсюда и из (29) следует, что

$$\|J'(\upsilon + \Delta\upsilon) - J'(\upsilon)\|_{2,(0,1)}^{(1)} = \|\Delta\psi\|_{2,(0,1)} \le M \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)} \cdot \left[1 + \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}^{(1)} \right].$$

Отсюда следует, что отображение $\upsilon \to J'(\upsilon)$ действует непрерывно из $W_2^1(0,1)$ в $W_2^1(0,1)$. Теорема 2 доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1) – (5) устанавливает

Теорема 3. Пусть выполнены условия при постановке задачи (1) – (5). Тогда для оптимальности управления $\upsilon_* \in V$ в задаче (1) – (5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^1 \omega(x_2;\upsilon_*)[\upsilon(x_2) - \upsilon_*(x_2)] dx_2 \ge 0$$

для любого $\upsilon \in V$, где $\omega(x_2;\upsilon_*)$ – решение задачи (25), (26) при $\upsilon = \upsilon_*$.

Справедливость утверждения теоремы 3 следует из теоремы 5 работы [15, с. 28].

Библиографический список

1 Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации [Текст] / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501-504.

2 Искендеров, А. Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики [Текст] / А. Д. Искендеров // ДАН СССР. – 1984. – Т. 274. – № 3. – С. 531-533.

3 Алифанов, О. А. Эксеремальные методы решения некорректных задач [Текст] / О. А. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. М. : Наука, – 1988. – 288 с.

4 Karchevsky A. L. Properties the misfit functional for a nonlinear one – dimensional coefficient hyperbolic inverse problem. // J. Inverse III – Posed. Probl. 1997. – V. 5. – № 2. – P. 139-165.

5 Кабанихин, С. И. Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи гиперболического уравнения [Текст] / С. И. Кабанихин, К. Т. Искаков // Сиб. матем. журн. 2001. – Т. 42. – № 3. – С. 567-584.

6 Тагиев, Р. К. Вариационный метод решения обратной задачи об определении коэффициентов эллиптических уравнений [Текст] / Р. К. Тагиев // Международная конференция “Обратные задачи теоритической и математической физики” Азербайджан. Сумгаит. Май 2003 г. – С. 29-31.

7 Искендеров, А. Д. Оптимальная идентификация коэффициентов эллиптических уравнений [Текст] / А. Д. Искендеров, Р. А. Гамидов // Автоматика и телемеханика. 2011. – № 2. – С. 144-155.

8 Iskenderov A. D., Tagiyev R. K. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem // The 7th International Conference “Inverse Problems: modelling and Simulation” (IPMS – 2014). May 26 – 31, – 2014. – P. 31.

9 Тагиев, Р. К. Об оптимизационной постановке коеффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием [Текст] / Р. К. Тагиев, Р. А. Касумов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. – № 45. – С. 49-59.

10 Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. М. : Наука, 1973. – 576 с.

11 Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболи-

ческого типа [Текст] / О. А. Ладыженская, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцев. М. : Наука, 1967. – 736 с.

12 Тагиев, Р. К. Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптических уравнений [Текст] / Р. К. Тагиев // Дифференц. уравнения. 2011. – Т. 47. – № 6. – С. 871-879.

13 Tagiyev R. K. Optimal control problems for elliptic equations with controls in coefficients // Transactions of NAS of Azerbaijan, isc.math. – mech. 2003. – V 43. – № 1. – P. 251-260.

14 Casado D., Couce C., Martin G. Optimality conditions for nonconvex multistate control problems in the coefficients // SIAM. J. Control and Optimiz. 2004. – V.43. – № 1. – P. 216-239.

15 Васильев, Ф. П. Методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. М. : Наука, 1981. – 400 с.