УДК 539. 3/.6

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Огарков В. Б., Аксенов А. А., Малюков С. В.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассматривается обыкновенное однородное дифференциальное уравнение [1-11] второго порядка в цилиндрической системе координат:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{a_1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{a_2}{r^2}u=0. \quad (1)$$

В этом уравнении: $u(r)$ – вещественная функция вещественного аргумента *r*; a_1 и a_2 – заданные постоянные вещественные коэффициенты.

Сделаем замену переменной:

$$r=e^x;\ dr=e^x dx;\ x=\ln r. \quad (2)$$

Уравнение (1) примет следующий вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+(a_1-1)\frac{du}{dx}+a_2\varphi=0. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\lambda_1(x)=\frac{du}{dx}+\left(c+i\sqrt{d}\right)u, \quad (4)$$

$$c=\frac{(a_1-1)}{2};\ \ d=a_2-\frac{(a_1-1)^2}{4}. \quad (5)$$

Функция $\lambda_1(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d\lambda_1}{dx}+\left(c-i\sqrt{d}\right)\lambda_1=0. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) имеют решения:

$$\lambda_1(x) = c_1 e^{-(c-i\sqrt{d})x};\ u(x) = \frac{c_1}{2i\sqrt{d}} e^{-(c-i\sqrt{d})x} + c_2 e^{-(c+i\sqrt{d})x}. \quad (7)$$

Если подставить решение (1) в уравнении (3), то получим тождество.

Функцию $u(x)$можно представить так:

$$u(x) = e^{-(c+i\sqrt{d})x}\left\{c_1 \int e^{(c+i\sqrt{d})x} e^{-(c-i\sqrt{d})x} dx + c_2\right\}. \quad (8)$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$d=0;\ a_2 = \frac{(a_1-1)^2}{4}. \quad (9)$$

Из формулы (8) получим:

$$u(x) = e^{-cx}(c_1 x + c_2) = r^{\frac{-(a_1-1)}{2}}(c_1 \ln r + c_2). \quad (10)$$

Для полого цилиндра имеем формулу (10).

Для сплошного цилиндра:

Если $a_1 > 1$, то формула (10) примет вид:

$$u(r) = \frac{c_1 \ln r}{r^{\frac{|a_1-1|}{2}}} + \frac{c_2}{r^{\frac{|a_1-1|}{2}}}, \quad (11)$$

$$\lim_{r\to 0} u(r) = \infty;\ c_1 = c_2 = 0. \quad (12)$$

Если $a_1 < 1$, то будем иметь:

$$u(r) = \frac{c_1 \ln r}{r^{\frac{-|a_1-1|}{2}}} + \frac{c_2}{r^{\frac{-|a_1-1|}{2}}}. \quad (13)$$

Воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{r\to}\left[\frac{c_1 \ln r}{r^{\frac{-|a_1-1|}{2}}} + \frac{c_2}{r^{\frac{-|a_1-1|}{2}}}\right] = \lim_{r\to 0}\left[\frac{\frac{c_1}{r}}{[-|a_1-1|-1]}\right] = 0, \quad (14)$$

$$u(r) = r^{\frac{|a_1-1|}{2}}[c_1 \ln r + c_2]. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь второй случай:

$$d = a_2 - \frac{(a_1-1)^2}{4} < 0; \quad a_2 < \frac{(a_1-1)^2}{4}, \tag{16}$$

$$i\sqrt{d} = i\sqrt{-|d|} = -\sqrt{|d|}. \tag{17}$$

Вторая формула (7) примет такой вид:

$$u(x) = \frac{c_1}{2i\sqrt{d}} e^{-\left(c+\sqrt{|d|}\right)x} + c_2 e^{-\left(c-\sqrt{|d|}\right)x}, \tag{18}$$

$$u(x) = \left[-\frac{c_1}{2\sqrt{|d|}} r^{-\sqrt{|d|}} + c_2 r^{\sqrt{|d|}}\right] r^{-c}. \tag{19}$$

Для полого цилиндра формула (19) сохраняет свой вид.

Для сплошного цилиндра при $a_1 < 1$:

$$c_1 = 0; \; u(r) = c_2 r \; . \tag{20}$$

Для сплошного цилиндра при $a_1 > 1$:

$$c_1 = c_2 = 0 \, . \tag{21}$$

Рассмотрим третий случай:

$$d = a_2 - \frac{(a_1-1)^2}{4} > 0; \; a_2 > \frac{(a_1-1)^2}{4}, \tag{22}$$

$$u(x) = e^{-cx}\left[\frac{c_1}{2i\sqrt{d}} e^{i\sqrt{d}x} + c_2 e^{-i\sqrt{d}x}\right]. \tag{23}$$

Используем формулу Эйлера:

$$e^{i\sqrt{d}x} = \cos\sqrt{d}x + i\sin\sqrt{d}x; \quad e^{-i\sqrt{d}x} = \cos\sqrt{d}x - i\sin\sqrt{d}x \; , \tag{24}$$

$$u(x) = e^{-cx}\left[\frac{-c_1 i}{2\sqrt{d}}\left(\cos\sqrt{d}x + i\sin\sqrt{d}x\right) + c_2\left(\cos\sqrt{d}x - i\sin\sqrt{d}x\right)\right]. \tag{25}$$

Решение нужно найти в виде сложения действительной и мнимой частей формулы (25):

$$u(r) = r^{-c}\left\{\left(\frac{c_1}{2\sqrt{d}} - c_2\right)\sin\left[\sqrt{d}\ln r\right] + \left(c_2 - \frac{c_1}{2\sqrt{d}}\right)\cos\left[\sqrt{d}\ln r\right]\right\}. \tag{26}$$

Для полого цилиндра формула (26) остается в силе при любом значении коэффициента *c*.

Для сплошного цилиндра при *c>0:* $c_1 = c_2 = 0$.

Для сплошного цилиндра при *c<0*:

$$u(r) = r^{|c|}\left\{\left(\frac{c_1}{2\sqrt{d}} - c_2\right)\sin[\sqrt{d}\ln r] + \left(c_2 - \frac{c_1}{2\sqrt{d}}\right)\cos[\sqrt{d}\ln r]\right\}. \qquad (27)$$

Обычно при решении уравнения (1) применяют спектральный метод:

$$u_r(r) = r^{\lambda}; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(a_1 - 1)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(a_1 - 1)^2}{4} - a_2\right]}, \qquad (28)$$

$$u(r) = c_1 r^{\lambda_1} + c_2 r^{\lambda_2}. \qquad (29)$$

Решение (29) представляет собой частное решение уравнения (1), поскольку из него невозможно получить формулу (10) и оно приводит к проблеме подсчета численных значений функции *u(r)* при комплексных значениях корней λ_1 и λ_2.

В данной работе получено общее решение уравнения (1) для всех значений коэффициентов a_1 и a_2 и во всем диапазоне изменения координаты *r*.

Оно имеет определенную теоретическую и практическую значимость и может быть внедрено при проектировании и расчете цилиндров из композиционных материалов (подшипник скольжения и прокатка проволоки через конус) и круглых полых и сплошных пластин (тензодатчики и полупроводники).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. [Текст] : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

2 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

3 Буевич, Ю. А. Структурно-механические свойства и фильтрация в упругом трещиновато-пористом материале [Текст] : Ю. А. Буевич // ИФЖ. – 1984. – Т. 46. – № 4.

4 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия

[Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.

5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ. / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

9 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

10 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.

11 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.