УДК 539. 3/.6

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Аксенов А. А., Огарков В. Б., Малюков С. В.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
E-mail: aaa-aksenov@mail.ru

Рассмотрим плоскую деформацию ортотропного упругого цилиндра в условиях плоской деформации [1, 2, 3, 4, 5]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0;\ \varepsilon_r=\frac{du}{dr};\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r};\ r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}+\varepsilon_\theta-\varepsilon_r=0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_r=A_1\sigma_r+A_2\sigma_\theta+A_3\sigma_z;\ \varepsilon_\theta=A_2\sigma_r+A_4\sigma_\theta+A_5\sigma_z, \quad (2)$$

$$\varepsilon_z=0=A_3\sigma_r+A_5\sigma_\theta+A_6\sigma_z;\ \sigma_z=-\frac{1}{A_6}[A_3\sigma_r+A_5\sigma_\theta], \quad (3)$$

$$\varepsilon_r=D_1\sigma_r+D_2\sigma_\theta;\ \varepsilon_\theta=D_2\sigma_r+D_3\sigma_\theta, \quad (4)$$

$$D_1=A_1-\frac{A_3^2}{A_6};\ D_2=A_2-\frac{A_3A_5}{A_6};\ D_3=A_4-\frac{A_5^2}{A_6}. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение потенциал напряжений:

$$\sigma_r=\frac{\varphi}{r};\ \sigma_\theta=\frac{d\varphi}{dr}. \quad (6)$$

Подставим формулы (4) и (6) в уравнение (1):

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{D_1}{D_3}\frac{\varphi}{r^2}=0, \quad (7)$$

$$\varphi(r)=c_1r^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}+c_2r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}};\ \frac{D_1}{D_3}>0, \quad (8)$$

$$\sigma_r=c_1r^{\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}-1\right)}+c_2r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)};\ \sigma_\theta=c_1\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}-1\right)}-c_2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)} \quad (9)$$

$$\varepsilon_r=D_1\left[c_1r^{\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}-1\right)}+c_2r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)}\right]+,$$

$$+D_2\left[c_1\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}-1\right)}-c_2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)}\right], \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta = D_2\left[c_1 r^{\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}-1\right)}+c_2 r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)}\right]+,$$

$$+D_3\left[c_1\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}-1\right)}-c_2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)}\right]. \quad (11)$$

Будем искать радиальное перемещение по формуле:

$$u(r) = \frac{1}{2}\left[r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr\right]. \quad (12)$$

Используем соотношение Коши (1):

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_\theta + \frac{1}{r}\int \varepsilon_r dr\right];\ \ \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) + \varepsilon_r\right], \quad (13)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left[r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr\right];\ \ u_2 = \frac{1}{2}\left[r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr\right]. \quad (14)$$

Эти перемещения будут одинаковые и будут выполняться соотношения Коши [6, 7, 8, 9, 10], если будут выполняться следующие равенства на основании уравнения совместности деформаций (1):

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) = \varepsilon_r;\ \ r\varepsilon_\theta = \int \varepsilon_r dr. \quad (15)$$

По формуле (12) найдем радиальное перемещение:

$$u(r) = \frac{1}{2}\left[D_2\left\{c_1 r^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} + c_2 r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\right\} + D_3\left\{c_1\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} - c_2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\right\}\right.$$
$$\left. + D_1\left\{\frac{c_1}{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}r^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} - \frac{c_2}{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\right\} + D_2\left\{c_1 r^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} + c_2 r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\right\}\right] \quad (16)$$

Если подставить перемещение (16) с помощью соотношений Коши (13) в соотношения (15), то легко проверить, что соотношения (15) выполняются тож-

дественно. Неизвестные константы интегрирования c_1 и c_2 находятся из граничных условий:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \;\; \sigma_r(r = r_2) = -q. \tag{17}$$

Здесь r_1 и r_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра; p и q – соответственно заданные внутреннее и внешнее давления.

Сделаем в уравнение (7) замену переменной:

$$r = e^x; \;\; dr = e^x dx; \;\; \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{D_1}{D_3}\varphi = 0\,. \tag{18}$$

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\lambda(x) = \frac{d\varphi}{dx} + \left(c + i\sqrt{d}\right)\varphi; \;\; c = 0; \;\; d = -\frac{D_1}{D_3}\,. \tag{19}$$

Для нахождения функции *(x)* имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\lambda}{dx} + \left(c - i\sqrt{d}\right)\lambda = 0; \;\; \sqrt{d} = i\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}; \; i\sqrt{d} = -\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}, \tag{20}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} - \sqrt{\frac{D_1}{D_3}}\varphi = \lambda(x); \;\; \frac{d\lambda}{dx} + \sqrt{\frac{D_1}{D_3}}\lambda = 0, \tag{21}$$

$$\lambda(x) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}x}; \;\; \varphi(x) = e^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}x}\left[c_1 \int e^{-2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}x} dx + c_2\right], \tag{22}$$

$$\varphi(x) = c_2 e^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}x} - \frac{c_2}{2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} e^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}x}; \;\; \frac{D_1}{D_3} > 0. \tag{23}$$

На основании формулы (18) получим:

$$\varphi(r) = c_2 r^{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} - \frac{c_1}{2\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\,. \tag{24}$$

Для полого цилиндра должно выполняться следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} - 1 > 0; \quad \sqrt{\frac{D_1}{D_3}} > 1. \tag{25}$$

Таким образом, решение (24) уравнения (7) единственно и не имеет точек бифуркации. Подставим закон Гука (4) в соотношение (12):

$$u(r) = \frac{r}{2}(D_2\sigma_r + D_3\sigma_\theta) + \frac{D_1}{2}\int \sigma_r dr + \frac{D_2}{2}\int \sigma_\theta dr. \tag{26}$$

Уравнение (21) запишется в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dr} - \sqrt{\frac{D_1}{D_3}}\frac{\varphi}{r} = c_1 r^{-\left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}+1\right)}; \quad \sqrt{\frac{D_1}{D_3}}\int \frac{\varphi}{r} dr = \varphi + \frac{c_1 r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}}{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}. \tag{27}$$

В соответствии с уравнением равновесия (1) и формулой (27):

$$u(r) = \frac{r}{2}(D_2\sigma_r + D_3\sigma_\theta) + \frac{D_2}{2} r\sigma_r + \frac{D_1}{2}\left[\frac{\varphi}{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} + \frac{D_3 c_1}{D_1} r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\right]. \tag{28}$$

Окончательно получим следующее выражение:

$$u(r) = \frac{r}{2}\left(\frac{D_2\varphi}{r} + D_3\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{D_2\varphi}{2} + \frac{D_1}{2}\left[\frac{\varphi}{\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}} + \frac{D_3 c_1}{D_1} r^{-\sqrt{\frac{D_1}{D_3}}}\right]. \tag{29}$$

Формула (29) имеет практическое значение, поскольку она позволяет найти значение производной $\frac{d\varphi}{dr}$ в точке r_1 через $\varphi(r_1)$ и $u(r_1)$. Зная величины $\varphi(r_1)$ и $\frac{d\varphi}{dr}$ $(r = r_1)$, мы можем из формулы (27) сразу найти константу c_1 и избежать громоздкой процедуры нахождения констант c_1 и c_2 из системы двух уравнений для граничных условий (17) (ползучесть или выгорающий канал: задана функция *u(t)* при $r = r_1$ и $\sigma_r(r = r_1) = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. [Текст] : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

2 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

3 Буевич, Ю. А. Структурно-механические свойства и фильтрация в упругом трещиновато-пористом материале [Текст] : Ю. А. Буевич // ИФЖ. – 1984. – Т. 46. – № 4.

4 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.

5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

9 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

10. Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.