УДК 539. 3/.6

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ УПРУГОГО КРИВОГО БРУСА ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Огарков В. Б., Аксенов А. А., Малюков С. В.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Рассмотрим уравнения совместности деформаций в цилиндрической системе координат [1, 3, 4, 5, 6, 7]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z} = 0, \tag{1}$$

$$r\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2\partial^2 \varepsilon_{\theta z}}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} - 2\frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{2\partial^2 (r\varepsilon_{\theta r})}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r}\right) - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - r\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left(\frac{1}{r}\varepsilon_{\theta z}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}\left(\frac{1}{r}\varepsilon_{zz}\right) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\theta z})\right] - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}(r^2 \varepsilon_{r\theta}) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\varepsilon_{rz}}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 (r\varepsilon_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 (r\varepsilon_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} + r\frac{\partial^2 (r\varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r \partial z} - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

При плоском аксиально-ссиметричном деформированном состоянии:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_{rr}}{dr} = 0. \tag{7}$$

В качестве примера использования уравнения совместности деформаций (7) рассмотрим задачу чистого изгиба упругого кривого бруса [2, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \tag{8}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_\theta];\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r], \tag{9}$$

$$\varepsilon_r = \frac{dy}{dr};\ \varepsilon_\theta = \frac{y}{r}. \tag{10}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\sigma_r(r=r_1)=0\ ;\ \sigma_r(r=r_2)=0\ ;\int_{r_1}^{r_2} r\sigma_\theta dr=-\mu. \tag{11}$$

В учебнике [2] приводятся следующие выражение для напряжения:

$$\sigma_r=-\frac{4\mu}{N}\left(\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}\right), \tag{12}$$

$$\sigma_\theta=-\frac{4\mu}{N}\left(-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}+r_2^2-r_1^2\right). \tag{13}$$

Подсчитаем величины деформаций по закону Гука (9):

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu\sigma_\theta]\ ;\ \varepsilon_\theta=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-\mu\sigma_r], \tag{14}$$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}\left\{-\frac{4\mu}{N}\left(\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}\right)-\mu\left[-\frac{4\mu}{N}\left(-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+r_1^2ln\frac{r_1}{r}+r_2^2-r_1^2\right)\right]\right\}, \tag{15}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}\left\{-\frac{4\mu}{N}\left(-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}+r_2^2-r_1^2\right)-\mu\left[-\frac{4\mu}{N}\left(\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}\right)\right]\right\}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_r=-\frac{4\mu}{EN}\left\{\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}-\mu\left[-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+r_2^2-r_1^2\right]\right\}, \tag{17}$$

$$\varepsilon_\theta=-\frac{4\mu}{EN}\left\{-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+r_1^2ln\frac{r_1}{r}+r_2^2-r_1^2-\mu\left[\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+r_2^2ln\frac{r}{r_2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+r_1^2ln\frac{r_1}{r}\right]\right\}, \tag{18}$$

$$\varepsilon_r=-\frac{4\mu}{EN}\left\{\frac{(1+\mu)r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+(1-\mu)r_2^2ln\frac{r}{r_2}+(1-\mu)r_1^2ln\frac{r_1}{r}-\mu(r_2^2-r_1^2)\right\}, \tag{19}$$

$$\varepsilon_\theta=-\frac{4\mu}{EN}\left\{-\frac{(1+\mu)r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+(1-\mu)r_2^2ln\frac{r}{r_2}+(1-\mu)r_1^2ln\frac{r_1}{r}+r_2^2-r_1^2\right\}, \tag{20}$$

$$\varepsilon_r=-\frac{4\mu}{EN}\left\{\frac{(1+\mu)r_1^2r_2^2}{r^2}ln\frac{r_2}{r_1}+(1-\mu)r_2^2lnr-(1-\mu)r_2^2lnr_2+(1-\mu)r_1^2lnr_1-\right.$$
$$\left.-(1-\mu)r_1^2lnr-\mu(r_2^2-r_1^2)\right\} \tag{21}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{4\mu}{EN}\left\{-\frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2}{r^2} ln\frac{r_2}{r_1} + (1-\mu)r_2^2 lnr - (1-\mu)r_2^2 lnr_2 + (1-\mu)r_1^2 lnr_1 - \right.$$
$$\left. -(1-\mu)r_1^2 lnr + r_2^2 - r_1^2\right\} \quad (22)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{4\mu}{EN}\left\{\frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2}{r^2} ln\frac{r_2}{r_1} + (1-\mu)(r_2^2 - r_1^2)lnr + (1-\mu)r_1^2 lnr_1 - -(1-\right.$$
$$\left.\mu)r_2^2 lnr_2 - \mu(r_2^2 - r_1^2)\right\} \quad (23)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{4\mu}{EN}\left\{-\frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2}{r^2} ln\frac{r_2}{r_1} + (1-\mu)(r_2^2 - r_1^2)lnr + (1-\mu)r_1^2 lnr_1 - \right.$$
$$\left. -(1-\mu)r_2^2 lnr_2 + r_2^2 - r_1^2\right\} \quad (24)$$

Рассмотрим уравнение совместности деформаций в следующем виде:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0\,, \quad (25)$$

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = -\frac{4\mu r}{EN}\left\{\frac{2(1+\mu)r_1^2 r_2^2}{r^2}\ ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{(1-\mu)(r_2^2 - r_1^2)}{r}\right\}, \quad (26)$$

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r = -\frac{4\mu}{EN}\left\{-\frac{2(1+\mu)r_1^2 r_2^2}{r^2} ln\frac{r_2}{r_1} + (1+\mu)(r_2^2 - r_1^2)\right\}, \quad (27)$$

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = -\frac{4\mu r}{EN}\left\{\frac{2(1+\mu)r_1^2 r_2^2}{r^2}\ ln\frac{r_2}{r_1} + (1-\mu)(r_2^2 - r_1^2)\right\}. \quad (28)$$

Подставим формулы (26) и (27) в уравнение совместности деформаций (25).

$$r_2^2 - r_1^2 = 0;\ r_2^2 \neq r_1^2. \quad (29)$$

Из соотношения (29) следует, что уравнение совместности деформаций (25) не выполняется, что является неприемлемым.

Легко видеть, что уравнение совместности деформаций (7) удовлетворяется при деформациях ε_rи ε_θ, заданных по формулам (23) и (24).

Проведём обобщение данной задачи на случай ортотропного материала.

$$\varepsilon_r = A_1\sigma_r + A_2\sigma_\theta;\ \varepsilon_\theta = A_2\sigma_r + A_3\sigma_\theta\,. \quad (30)$$

Преобразуем уравнение (7):

$$2r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + r^2\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0, \quad (31)$$

$$2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}+r\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2}-\frac{d\varepsilon_r}{dr}=0, \tag{32}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right)+r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}-\frac{d\varepsilon_r}{dr}=0, \tag{33}$$

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}+\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}-\frac{d\varepsilon_r}{dr}=C_1. \tag{34}$$

Подставим закон Гука (30) в уравнение совместности (34):

$$A_2\frac{d\sigma_r}{dr}+A_3\frac{d\sigma_\theta}{dr}+(A_2-A_1)\sigma_r+(A_3-A_2)\sigma_\theta=C_1. \tag{35}$$

Введём в рассмотрение потенциал напряжений:

$$\sigma_r=\frac{\varphi}{r};\ \sigma_\theta=\frac{d\varphi}{dr}. \tag{36}$$

Уравнение (35) примет такой вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{(2A_3-A_2)}{A_3r}\frac{d\varphi}{dr}+\frac{(A_2-A_1-A_3)}{A_3r^2}=\frac{C_2}{A_3r}. \tag{37}$$

Решение уравнения (37) имеет следующий вид:

$$\varphi(r)=D_1r^{K_1}+D_2r^{K_2}+\frac{C_2}{(A_3-A_1)}r, \tag{38}$$

$$K_1=\frac{(A_2-A_3)}{2A_3}+\frac{1}{2A_3}\sqrt{[(A_2-A_3)^2-4(A_2-A_1-A_3)]}, \tag{39}$$

$$K_2=\frac{(A_2-A_3)}{2A_3}-\frac{1}{2A_3}\sqrt{[(A_2-A_3)^2-4(A_2-A_1-A_3)]}. \tag{40}$$

Напряжения найдём по формулам (30):

$$\sigma_r=\frac{\varphi}{r}=D_1r^{(K_1-1)}+D_2r^{(K_2-1)}+\frac{C_2}{(A_3-A_1)}, \tag{41}$$

$$\sigma_\theta=\frac{d\varphi}{dr}=K_1D_1r^{(K_1-1)}+K_2D_2r^{(K_2-1)}+\frac{C_2}{(A_3-A_1)}. \tag{42}$$

Подставим напряжения (41) и (42) в граничные условия (11):

$$D_1r_1^{(K_1-1)}+D_2r_1^{(K_1-1)}+\frac{C_2}{(A_3-A_1)}=0, \tag{43}$$

$$D_1 r_2^{(K_1-1)} + D_2 r_2^{(K_1-1)} + \frac{C_2}{(A_3-A_1)} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{K_1 D_1}{(K_1+1)}\left[r_2^{(K_1+1)} - r_1^{(K_1+1)}\right] + \frac{K_2 D_2}{(K_2+1)}\left[r_2^{(K_2+1)} - r_1^{(K_2+1)}\right] + \frac{(r_2^2-r_1^2)}{2(A_3-A_1)} C_2 = -\mu. \quad (45)$$

Решение алгебраической системы (43)-(45) имеет следующий вид:

$$D_2 = \frac{\left[r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)}\right] C_2}{(A_1-A_3)\left[r_1^{(K_2-1)} r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)} r_2^{(K_2-1)}\right]}, \quad (46)$$

$$D_1 = \frac{\left[r_1^{(K_2-1)} - r_2^{(K_2-1)}\right]\left[r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)}\right] C_2}{(A_1-A_3)\left[r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)}\right]\left[r_1^{(K_2-1)} r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)} r_2^{(K_2-1)}\right]}, \quad (47)$$

$$C_2 = -\frac{\mu}{L}, \quad (48)$$

$$L = \frac{K_1}{(K_1+1)} \frac{\left[r_2^{(K_1+1)} - r_1^{(K_1+1)}\right]\left[r_1^{(K_2-1)} - r_2^{(K_2-1)}\right]\left[r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)}\right]}{(A_1-A_3)\left[r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)}\right]\left[r_1^{(K_2-1)} r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)} r_2^{(K_2-1)}\right]} +$$

$$+ \frac{K_2}{(K_2+1)} \frac{\left[r_2^{(K_2+1)} - r_1^{(K_2+1)}\right]\left[r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)}\right]}{(A_1-A_3)\left[r_1^{(K_2-1)} r_2^{(K_1-1)} - r_1^{(K_1-1)} r_2^{(K_2-1)}\right]} + \frac{(r_2^2-r_1^2)}{2(A_3-A_1)}. \quad (49)$$

Напряжения (41) и (42) удовлетворяют уравнению равновесия (3), граничным условиям (11), уравнению совместности деформаций (7) и закону Гука (9), а также зависят от механических свойств ортотропного материала (A_1, A_2 и A_3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Костунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел [Текст] : учеб. / М. А. Костунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – М. : Высшая школа, 1975. – 526 с.

2 Тимошенко, С. П. Теория упругостей [Текст] : учеб. / С. П. Тимошенко, Д. Ж. Гудьер. – М. : Наука, 1975 – 576 с.

3 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. [Текст] : учеб. / Е.К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

4 Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. / Г. С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

5 Буевич, Ю. А. Структурно-механические свойства и фильтрация в упругом трещиновато-пористом материале [Текст] : Ю. А. Буевич // ИФЖ. – 1984. – Т. 46. – № 4.

6 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.

7 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособ / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

8 Кучерявый, В. И. Теория упругости [Текст] : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

9 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

10 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car [Text] : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

11 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks [Text] : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

12 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling [Text] : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.

13 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии [Текст] / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.